

GRAPHES

Sommaire

1. Vocabulaire de base
2. Chaîne et cycle eulériens
3. Matrice associée à un graphe
4. Coloriage des sommets d'un graphe

Logiciels

1. Calculatrice : éditer la matrice associée à un graphe
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur p
3. Utiliser le logiciel GRIN

EULER et les ponts de Königsberg

La ville de Königsberg est traversée par la Pregolia qui passe à droite et à gauche de l'île de Kneiphof .

Sept ponts franchissent cette rivière. Dans les années 1730, un problème passionnait les promeneurs du dimanche : **est-il possible de trouver un itinéraire qui les ramène à leur point de départ et qui leur fasse traverser, une fois et une seule, chaque pont ?**

voir exercice 88

A. Notion de matrice

1° **VRAI ou FAUX.** Justifier la réponse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) La matrice A est une matrice carrée.
- b) La dimension de A est 3×4 .
- c) $a_{1,2} = 3$.
- d) L'élément situé à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne s'écrit $a_{2,3}$.

2° a) Écrire la matrice carrée A d'ordre 2 telle que :

$$a_{1,1} = a_{2,2} = 0, \quad a_{1,2} = 1 \quad \text{et} \quad a_{2,1} = 3.$$

b) Écrire la matrice B symétrique d'ordre 3 telle que tous les éléments b_{ij} soient égaux à 1 et telle que $b_{1,2} = 2, b_{1,3} = 3$ et $b_{2,3} = 0$.

3° Les matrices A et B du 2° sont-elles égales à leur transposée A^T et B^T ?

Donner la définition de la transposée d'une matrice M .

4° On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner l'élément à l'intersection de la deuxième ligne et de la quatrième colonne, puis l'élément à l'intersection de la quatrième ligne et de la deuxième colonne.

Les matrices sont-elles symétriques ?

B. Produits de matrices

1° On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = [0 \ 1 \ 0]; \quad E = [0 \ 0 \ 1].$$

- a) Donner les dimensions des matrices : A et C ; $C \times A$; $A \times B$.
- b) Calculer, **sans calculatrice**, les produits : $C \times A$; $D \times A$; $E \times B$; $A \times B$; $B \times A$.

c) Soit la matrice $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Indiquer les produits que l'on peut calculer parmi :

$$A \times C, \quad C \times F, \quad F \times C, \quad A \times F \quad \text{et} \quad F \times A.$$

Justifier la réponse et calculer ces produits lorsque le calcul est possible.

2° Soit $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -2 & -2,5 \\ 3 & 3,5 \end{bmatrix}$.

Calculer, **sans calculatrice**, les produits : $A \times B$ et $B \times A$.

Comparer les résultats. En déduire ce que représente la matrice B pour la matrice A .

3° On donne les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Utiliser la calculatrice pour calculer :

- a) les produits $A \times B$ et $B \times A$;
- b) les inverses A^{-1} et B^{-1} .

4° On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

- a) Donner les dimensions de : A , B , $A \times B$ et $B \times A$.

Calculer à la main $A \times B$ et $B \times A$.

b) Peut-on calculer A^2 ?

c) Soit $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Peut-on calculer $A \times C$ et $B \times C$? Si oui, faire le calcul à la main.

C. Puissances de matrices

1° Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculer, **sans calculatrice**, M^2, M^3 et M^4 .

2° Soit $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

A-t-on $C = B^2$?

Calculer B^3, B^4, B^6, B^8, C^2 et C^4 .

3° Soit la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer, à l'aide de la calculatrice, les puissances de M :

$$M^2, \quad M^3, \quad M^4 \quad \text{et} \quad M^5.$$

Activité 1. Itinéraires

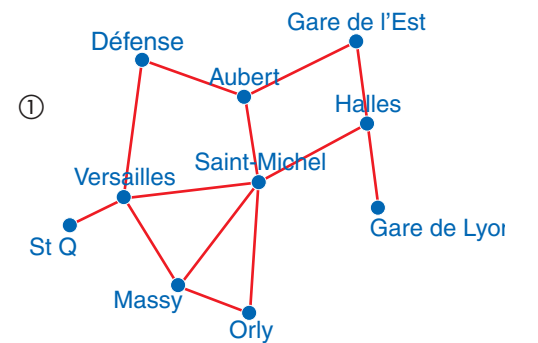
1° Sur le plan ci-contre (figure ①) du RER de la ville de Paris, Audrey étudie les trajets pour se rendre à la Gare de Lyon. Elle habite à Saint Quentin en Yvelines (St Q).

a) Trouver un trajet passant par 6 gares (terminus compris) entre Saint Quentin en Yvelines et Gare de Lyon.

b) Donner le nombre de gares du trajet le plus court entre St Quentin en Yvelines et la Gare de Lyon.

c) Audrey doit accompagner sa sœur à la Gare de l'Est avant de prendre son train Gare de Lyon.

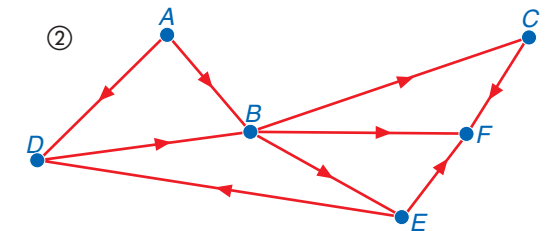
Trouver un des trajets le plus court entre St Quentin en Yvelines et Gare de Lyon, passant par la Gare de l'Est.



2° Le plan ci-contre (figure ②), indique les sens de circulation des rues d'un lotissement.

Déterminer tous les trajets qui partent de A et arrivent à F en suivant :

- a) deux rues ;
- b) trois rues ;
- c) quatre rues.



3° À 6 heures, à son entrepôt de Grenoble, un camionneur reçoit sa feuille de route pour la matinée.

6 h 45	Vizille, magasin n°1	9 h 45	La Mure
7 h 30	Lafrey, magasin n°1	10 h 30	Vizille, magasin n°2
7 h 40	Lafrey, magasin n°2	10 h 50	Seyssin, magasin n°1
8 h 15	La Mure	11 h 30	Seyssin, magasin n°2
9 h	Ponsonna	12 h	Entrepôt

Donner un schéma représentant son circuit de livraison.

4° **Comparaison des trois schémas des questions précédentes**

a) À la question 2°, les rues du lotissement sont schématisées par des flèches. À la question 1°, comment sont représentés les trajets du RER entre deux gares ? Expliquer pourquoi on a besoin de ces deux représentations différentes.

b) À la question 3°, les déplacements du camionneur sont aussi représentés par des flèches, pour-tant le schéma représentant son circuit est différent de celui de la question 2°. Décrire et expliquer ces différences.

Activité 2. Ordonnement

Pour construire une pergola, Mme T. fait appel à différents artisans.

- M : un maçon, pour le sol, le toit et les murs ;
- P : un peintre pour le revêtement extérieur ;
- E : un électricien, pour les câbles électriques et le chauffage ;
- C : un plombier pour les canalisations ;
- V : un vitrier, pour les baies vitrées ;
- D : un décorateur pour les tapisseries et les moquettes ;
- J : un jardinier pour organiser les plantations ;
- B : un ébéniste pour la confection des meubles.

Certaines tâches doivent nécessairement être réalisées avant d'autres.

Le tableau suivant donne, en deuxième ligne, les tâches x à réaliser immédiatement avant la tâche y :

y	M	P	E	C	V	D	J	B
x	$C; E$	V			M	V	P	$J; D$

Représenter par un schéma l'ordonnement des différentes tâches.

aide en corrigés

aide en corrigés

aide en corrigés

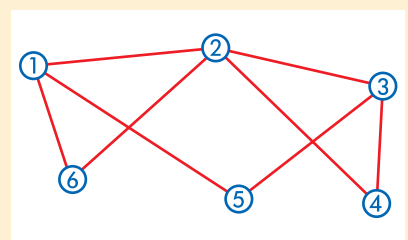


Activité 3. Parcours

Définition : Circuler entre deux sommets x et y d'un polygone ou d'un polyèdre, c'est parcourir d'une manière continue toutes les arêtes de cette figure, en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête. On peut repasser plusieurs fois par un sommet.

Exemple : Sur le polygone ci-contre, on circule entre ① et ③ en parcourant par exemple :

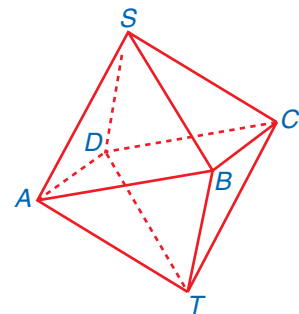
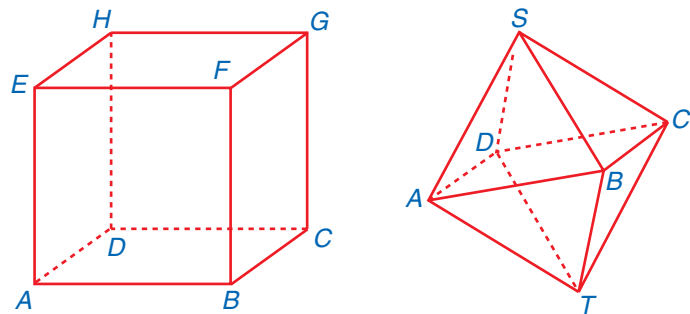
① - ② - ③ - ⑤ - ① - ⑥ - ② - ④ - ③ .



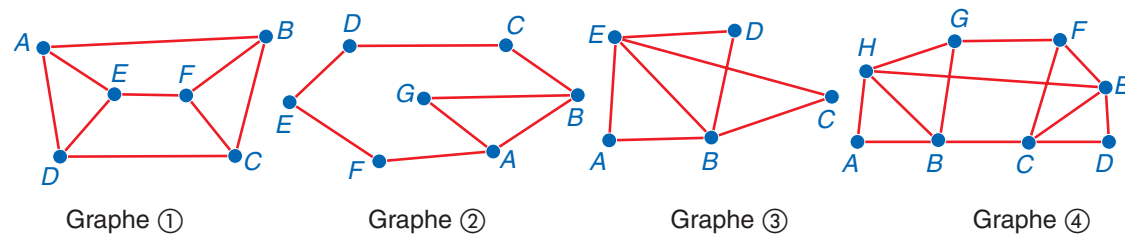
Applications :

1° Un cube et un octaèdre, ci-dessous, sont fabriqués en fil de fer. Une fourmi peut-elle circuler entre deux sommets quelconques du cube ? entre deux sommets quelconques de l'octaèdre ?

Le sommet de départ et celui d'arrivée peuvent-ils être confondus ?



2° Peut-on parcourir tous les segments des graphes ci-après sans lever le crayon en partant d'un sommet et en arrivant à un autre sommet ?



3° Peut-on parcourir tous les segments des figures ci-dessus, sans lever le crayon, en partant d'un sommet et en revenant à ce même sommet ? Sinon quelles arêtes faut-il enlever ?

4° Au cours d'une randonnée, Sophie consulte sa carte pour situer les quatre sites qu'elle veut atteindre avant de se reposer au gîte. Du lieu où elle se trouve :

- vers l'Est, un chemin conduit à la cascade ;
- vers le Sud, un autre chemin descend vers le lac.

De la cascade, en marchant toujours vers l'Est, elle peut atteindre un belvédère, puis le gîte d'étape. À partir du lac, un chemin vers le Nord-Est rejoint la cascade, un autre se dirigeant vers l'Est traverse une forêt, puis oblique vers le Nord-Est pour arriver au belvédère.

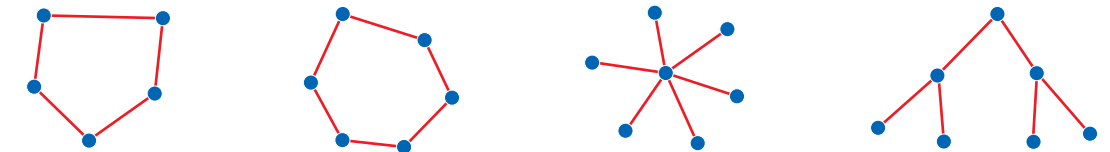
- Faire un schéma représentant les différents chemins que Sophie peut emprunter.
- Sophie peut-elle visiter les quatre sites avant d'arriver au gîte sans passer deux fois sur le même chemin ? Proposer un itinéraire que pourra suivre Sophie pour faire cette visite.



Activité 4. Coloriage

1° Proposer une coloration des sommets de chaque figure, de telle sorte que deux sommets reliés par un segment ne soient pas de la même couleur.

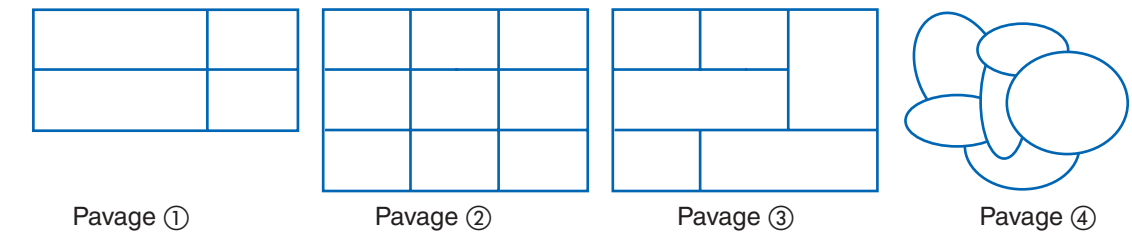
Quel est le nombre minimal de couleurs que l'on peut utiliser pour chacune des figures ?



2° On veut colorier les pavages suivants de telle sorte que deux zones voisines ne soient pas de la même couleur.

Combien de couleurs au minimum suffit-il d'utiliser ?

Deux zones ayant un coin seulement en commun n'ont pas de frontière commune.



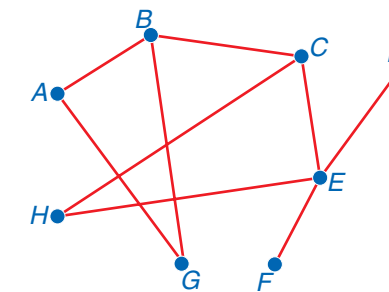
3° On veut organiser un examen pour l'entrée dans une école de commerce. Chaque candidat ne passe qu'une épreuve par jour. Les options proposées sont : Philosophie (P), Anglais (A), Allemand (D), Espagnol (E), Italien (I), Russe (R). Les choix des candidats sont les suivants :

P, A, D ou A, I ou P, E, A ou A, R.

- Donner un schéma traduisant la situation.
- Combien d'épreuves au maximum peut-on prévoir par jour ? Trois jours sont-ils suffisants pour que tous les candidats passent l'examen ?

Activité 5. Compatibilité – Incompatibilité

1° Julien veut réunir ses amis dans une auberge pour fêter son anniversaire. Il doit réserver un certain nombre de chambres. Chacun de ses amis lui a mentionné les personnes avec qui ils ne veulent pas partager leur chambre. Julien a résumé ces demandes par le schéma suivant :



Un segment signifie que deux personnes ne veulent pas partager la même chambre. Combien de chambres Julien devra réserver ?

2° Un jardinier dispose de six sortes de fleurs A, B, C, D, E, F, pour aménager plusieurs massifs d'un parc floral.

- Les fleurs A ne peuvent pas pousser près des fleurs B, C ou D.
- Les fleurs B ne s'épanouissent que près des fleurs C ou D.
- Les fleurs C meurent si elles sont plantées à côté des fleurs D ou E.
- Les fleurs F ne supportent pas la présence des fleurs E.

- Dresser un tableau à double entrée faisant apparaître les incompatibilités entre les différentes sortes de fleurs.
- Traduire par un schéma les incompatibilités.
- Combien de massifs doit prévoir le jardinier ? Combien de sortes de fleurs contiendront chacun des massifs ? Donner un arrangement possible des fleurs dans les massifs.



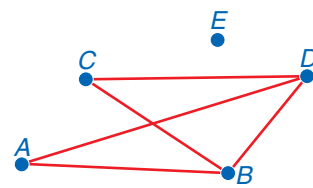
1 Vocabulaire de base

Définitions

Un **graphe** est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.
 Un **sommet** du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est l'**ordre** du graphe.
 Une **arête** du graphe est une ligne reliant deux sommets. Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.
 Un sommet est **isolé** lorsque aucune arête ne le relie aux autres sommets.
 Un graphe **simple** est un graphe **sans boucle** tel que, entre deux sommets, il y ait **au plus une arête**. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.
 Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées. Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.
 Le **degré** d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Exemples :

①

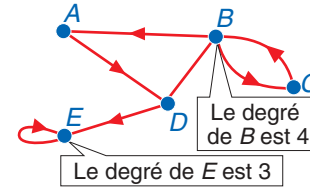


Le graphe ① est un **graphe simple d'ordre 5** : ses sommets sont :

A, B, C, D et E .

Les sommets A et B sont **adjacents**, mais A et C ne sont pas adjacents. E est un sommet **isolé**.

②



Le graphe ② est un **graphe orienté** ayant sept arêtes.

Une arête qui part ou arrive en un sommet compte pour 1.

Au sommet E , une arête arrive de D et la boucle en E a deux extrémités en E ; donc E est de degré 3.

Théorème

La **somme des degrés** de tous les sommets d'un graphe est égal au **double du nombre total d'arêtes**.

Exemple :

Le graphe ① ci-dessus comporte 5 arêtes : $A-B$; $A-D$; $B-D$; $B-C$; $C-D$.

On indique le degré de chacun des sommets dans un tableau :

La somme des degrés des sommets est :
 $2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 10 = 2 \times 5$.

sommet	A	B	C	D	E
degré	2	3	2	3	0

Définitions

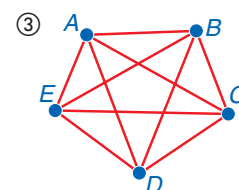
Un graphe **complet** est un graphe simple dont **tous les sommets sont adjacents** les uns avec les autres.

Dans le graphe complet d'**ordre n** , le degré de chacun des sommets est $n - 1$.

Exemple :

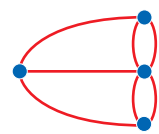
Le graphe ③ est un **graphe complet d'ordre 5** : il n'est pas orienté et chaque sommet est relié aux quatre autres sommets.

Il comporte $\frac{5 \times 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$ arêtes.



Une arête reliant deux sommets A et B est une paire notée $\{A; B\}$ ou plus simplement : $A-B$

Le graphe ci-dessous est un multigraphe :



Remarque :
 la somme des degrés des sommets d'un graphe est donc un nombre pair

Remarque :
 le nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre n est :
 $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

A. Décrire un graphe

Méthode

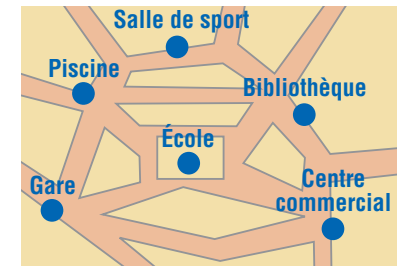
Décrire un graphe, c'est donner son ordre, le nombre des arêtes et indiquer si le graphe est simple, orienté ou non orienté.

Pour trouver le degré de chaque sommet d'un graphe non orienté, on compte le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité.

Dans un graphe complet d'ordre 6, chaque sommet est de degré 5.

Voir exercices 4 à 6

Énoncé : Le plan ci-contre représente le réseau des pistes cyclables desservant certains sites d'une agglomération.



- 1° Construire le graphe associé à ce réseau.
- 2° Décrire ce graphe.
- 3° Indiquer, dans un tableau, le degré de chacun de ses sommets. Le graphe est-il complet ? Justifier.
- 4° Combien de pistes cyclables la municipalité doit-elle construire pour que deux sites quelconques de l'agglomération soient reliés directement ?

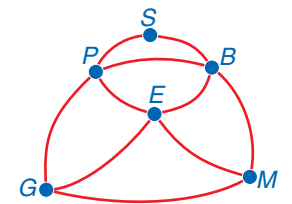
Résolution :

1° Graphe ci-contre.

2° Les sommets sont les 6 sites, donc le graphe est d'ordre 6. Il y a 10 pistes cyclables, donc le graphe comporte 10 arêtes. C'est un graphe simple non orienté.

3° Tableau des degrés des sommets :

sommet	S	P	B	E	G	M
degré	2	4	4	4	3	3



Le graphe n'est pas complet, car il existe deux sommets non adjacents S et E , par exemple.

4° Pour que deux sites quelconques soient reliés directement par une piste cyclable, le graphe doit être complet. Tous les sommets doivent être de degré 5. La somme des degrés des sommets d'un graphe est alors égale au double du nombre d'arêtes. Ainsi, la somme des degrés sera $6 \times 5 = 30$, soit un graphe de 15 arêtes. La municipalité doit donc construire cinq pistes cyclables supplémentaires : trois pistes $S-E$, $S-G$ et $S-M$ d'extrémité S , une piste $P-M$ d'extrémité P et une piste $B-G$ d'extrémité B .

B. Traduire une situation par un graphe

Méthode

Pour traduire une situation par un graphe : on indique quels sont les sommets du graphe et ce que représente une arête entre deux sommets.

Pour savoir si on peut construire un graphe, on utilise souvent le théorème suivant :

la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

Voir exercices 7 à 12

Énoncé : Sept lycées possèdent chacun un club de théâtre. Ils proposent d'organiser un tournoi de matchs d'improvisation, où chaque club doit rencontrer cinq autres clubs participants.

Traduire par un graphe. L'organisation de ce tournoi est-elle possible ? Sinon, proposer une autre organisation du tournoi.

Résolution : On traduit la situation par un graphe non orienté dont les sommets correspondent aux clubs des lycées.

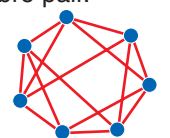
Une arête entre deux sommets représente un match entre deux clubs.

Le graphe est non orienté et d'ordre 7.

Si chaque club rencontre 5 autres clubs, le degré de chaque sommet est 5. Donc la somme des degrés est $7 \times 5 = 35$.

Or la somme des degrés des sommets d'un graphe est un nombre pair. L'organisation de ce tournoi est donc impossible.

Pour qu'elle soit possible entre ces 7 clubs, il faut que le degré de chaque sommet soit un nombre pair, donc chaque club doit rencontrer 2, 4 ou 6 autres clubs.



2 Chaîne et cycle eulériens

Définitions

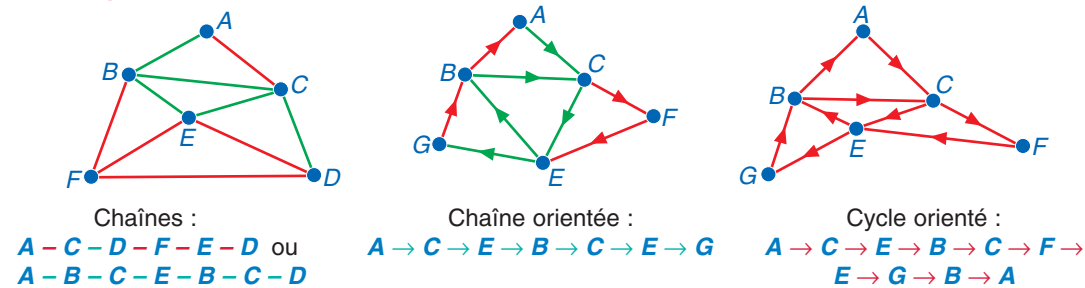
Une **chaîne**, dans un graphe non orienté, est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.

Une **chaîne orientée**, dans un graphe orienté, est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité terminale de l'une est l'extrémité initiale de l'autre.

Un **cycle**, dans un graphe, est une chaîne dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes **toutes distinctes**.

Une chaîne est notée par la **liste** des sommets où elle passe, reliés par un segment ou une flèche quand le graphe est orienté.

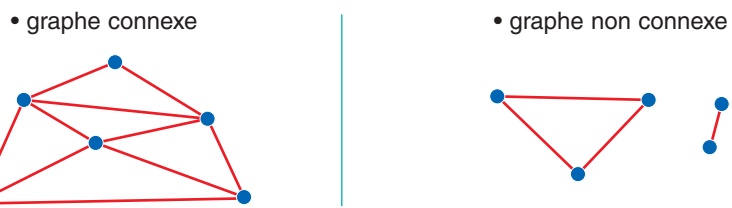
Exemples



Définition

Un graphe est **connexe** lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.

Exemples :



chaîne eulérienne	cycle eulérien
Définition : c'est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois	Définition : c'est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident
Théorème : Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne entre les sommets A et B si, et seulement si, A et B seulement sont de degré impair	Théorème : Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous les sommets sont de degré pair
Exemple : La chaîne $A-C-B-E-A-F-E-D-B$ est une chaîne eulérienne	Exemple : La chaîne $A-C-B-E-A-B-D-E-F-A$ est un cycle eulérien

Remarque : dans une chaîne, on peut utiliser plusieurs fois la même arête et passer plusieurs fois par le même sommet

Note : pour deux sommets, il peut y avoir plusieurs chaînes reliant ces sommets

complet \Rightarrow connexe ainsi : un graphe complet est connexe
un graphe ayant un **sommet isolé** est non connexe

Ces théorèmes sont appelés théorèmes d'EULER (1707-1783)

À l'aide de ces théorèmes, EULER a résolu le problème des « Ponts de Königsberg » dans un mémoire publié en 1736 voir travaux, p. 236

C. Prouver l'existence d'un cycle eulérien ou d'une chaîne eulérienne

Méthode

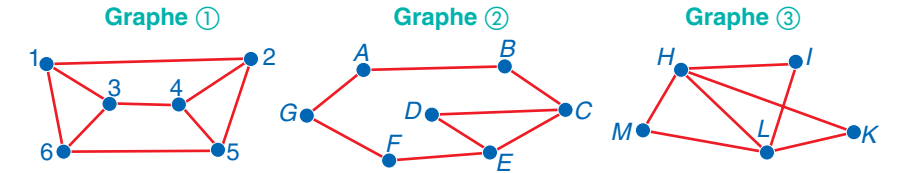
On vérifie que le graphe est connexe, puis on recherche le degré de chacun des sommets.

Si deux sommets seulement sont de degré impair, alors le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités ces sommets.

Si tous les sommets sont de degré pair, alors le graphe admet un cycle eulérien.

Voir exercices 25 à 27

Énoncé : Peut-on parcourir, une fois et une seule, chacune des arêtes de ces graphes sans lever crayon ?



Résolution :

- Le graphe ① est connexe d'ordre 6. Tous les sommets sont de degré 3, donc ce graphe n'admet pas de chaîne eulérienne. On ne peut pas parcourir toutes les arêtes du graphe sans lever le crayon.
- Le graphe ② est connexe d'ordre 7. Seuls les sommets C et E sont de degré 3, impair. Le graphe admet donc une chaîne eulérienne d'extrémités C et E. On peut parcourir toutes les arêtes du graphe sans lever le crayon. Par exemple, $C-D-E-F-G-A-B-C-E$.
- Le graphe ③ est connexe d'ordre 5. Tous les sommets sont de degré pair, donc le graphe ③ admet un cycle eulérien.

D. Mettre en évidence une chaîne eulérienne

Méthode

Pour déterminer une chaîne eulérienne entre deux sommets :

- ① on choisit l'un de ces sommets et on décrit un cycle qui retourne à ce sommet ;
on efface alors les arêtes parcourues dans ce cycle et les sommets qui se trouvent isolés ;
- ② on choisit **un des sommets utilisés dans le cycle précédent**, et on décrit un autre cycle ;
- ③ on « soude » les deux cycles par le **sommet commun** ;
- ④ s'il ne reste pas d'arêtes, le cycle obtenu est un cycle eulérien ; s'il reste une seule arête, on obtient une chaîne eulérienne.

Voir exercices 28 à 30

Énoncé : Dans une région, cinq pays se partagent l'espace géographique. Est-il possible de visiter ces pays en ne traversant qu'une seule fois chaque frontière ?

Résolution : Le graphe associé est connexe.

Degré de chacun des sommets :

sommet	A	B	C	D	E
degré	3	2	4	2	3

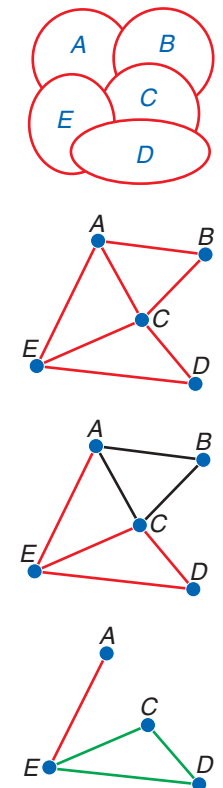
Comme A et E sont les seuls sommets de degré impair, le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et E.

Pour décrire une chaîne, on choisit de partir de A :

- on prend le cycle $A-B-C-A$, puis on efface les arêtes parcourues et le sommet isolé B ;
- on choisit le cycle $C-E-D-C$, puis on efface les arêtes parcourues et les sommets isolés C et D ;
- on soude alors les deux cycles et on obtient le cycle : $A-B-C-E-D-C-A$.

Il ne reste plus de cycle, mais une seule arête $A-E$.
Donc le graphe admet pour chaîne eulérienne : $A-B-C-E-D-C-A-E$.

On a d'autres façons de décrire cette chaîne. On peut donc visiter ces pays en traversant une seule fois chaque frontière.



3 Matrice associée à un graphe

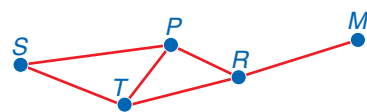
Définitions

La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
La distance entre deux sommets d'un graphe connexe est la longueur de la chaîne qui les relie, ayant le moins d'arêtes.
Le diamètre d'un graphe connexe est la plus grande distance constatée entre deux sommets de ce graphe parmi toutes les paires de sommets.

Attention :
la longueur d'une chaîne n'a pas de lien avec une distance mesurée sur le dessin

Unicité :
une plus courte chaîne entre deux sommets n'est pas toujours unique

Exemple : $S-T-P-R-M$ est une chaîne de longueur 4 entre S et M .
La distance entre S et M est égale à 3.
Le diamètre du graphe est 3.



Définition

La matrice associée à un graphe d'ordre n est la matrice carrée A de dimension $n \times n$, dont l'élément a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .
Si les sommets i et j ne sont pas adjacents, alors $a_{ij} = 0$.
Pour un graphe **orienté**, a_{ij} est le nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j .

Attention :
pour écrire la matrice d'un graphe, on ordonne les sommets

Exemples

	graphe non orienté					graphe orienté				
	A	B	C	D		A	B	C	D	
A	0	1	1	0		A	0	1	1	
B	1	0	0	1		B	0	0	0	1
C	1	0	0	1		C	0	0	0	1
D	0	1	1	0		D	0	0	1	0

La matrice d'un graphe **non orienté** est symétrique

La matrice d'un graphe **orienté** n'est pas symétrique

On dicte toujours une matrice ligne par ligne

Théorème admis

Soit A^p la matrice puissance **p -ième** de A obtenue par $A^p = A \times A \times \dots \times A$.
L'élément p_{ij} de la matrice A^p est égal au **nombre de chaînes de longueur p** reliant le **sommet i** au **sommet j** .

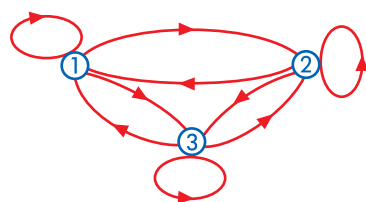
Pour aller plus loin :
Le terme q_{ij} de la matrice somme :
 $M + M^2 + \dots + M^p$
est égal au nombre total de chaînes de longueur inférieure ou égale à p

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ et $A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

La matrice A donne les nombres a_{ij} de chaînes de longueur 1 entre le sommet i et le sommet j .
Les chaînes de **longueur 2** allant du sommet ① vers le sommet ② suivent les trajets suivants :
(1-1; 1-2) ; (1-2; 2-2) ; (1-3; 3-2).

Le nombre de chaînes de longueur 2 allant du sommet ① vers le sommet ② est donc donné par :
 $a_{11} \times a_{12} + a_{12} \times a_{22} + a_{13} \times a_{32} = p_{12}$.



E. Faire le lien entre graphe et matrice

Méthode

Pour déterminer le degré d'un sommet :
a) d'un graphe orienté :
on ajoute tous les éléments de la ligne et de la colonne correspondant à ce sommet.

b) d'un graphe non orienté :
on ajoute seulement les éléments de la ligne correspondant à ce sommet.

Pour déterminer le nombre d'arêtes d'un graphe :

a) pour un graphe orienté :
on ajoute tous les éléments de la matrice.

b) pour un graphe non orienté :
la somme de tous les éléments de la matrice est égale au double du nombre d'arêtes.

Énoncé : Deux graphes sont définis par leur matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ces deux graphes sont-ils orientés ?
 Quel est le degré du deuxième sommet de chaque graphe ?
 Quel est le nombre d'arêtes de chacun de ces graphes ?

Résolution :

- La matrice A n'est pas symétrique, donc le graphe est orienté. La somme des éléments de la deuxième ligne et de la deuxième colonne est $2 + 2 = 4$. Le sommet 2 a donc pour degré 4. La somme des éléments de la matrice est égale à 8, donc le graphe a 8 arêtes orientées.
- La matrice B est symétrique, donc le graphe n'est pas orienté. La somme des éléments de la deuxième ligne est 2, donc le deuxième sommet est de degré 2. La somme des éléments de la matrice est 8, donc le graphe a 4 arêtes.

Remarque : La troisième ligne et la troisième colonne de la matrice B ne contiennent que des zéros, donc le sommet 3 est un sommet isolé. Cela implique que le graphe n'est pas connexe.

Voir exercices 43 à 49

F. Déterminer le nombre de chaînes de longueur p

Méthode

On ordonne les sommets du graphe, ici par ordre alphabétique.

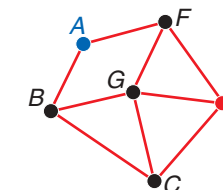
Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 entre le sommet 1 et le sommet 6, on entre la matrice associée au graphe dans la calculatrice.

► voir page logiciels, p. 220

On calcule A^3 et on lit p_{16} sur la première ligne, sixième élément.

Énoncé :

On a le plan d'un quartier ci-contre, chaque rue a pour longueur 500 m.



Déterminer tous les trajets ayant pour longueur 1 500 m entre la maison d'Agathe A et la piscine P.

Résolution : Un trajet de longueur 1 500, soit 3×500 , correspond à une chaîne de longueur 3.

On veut donc déterminer toutes les chaînes de longueur 3 entre les sommets A et P.

On range les sommets dans l'ordre A ; B ; C ; F ; G ; P.
A est le sommet 1 et P le sommet 6.

À l'aide de la calculatrice, on calcule A^3 .

On lit le terme p_{16} sur la première ligne de A^3 :
comme $p_{16} = 3$, il y a 3 trajets de longueur 1 500 m entre la maison d'Agathe et la piscine.

[A]	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Ans 3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Voir exercices 50 et 51

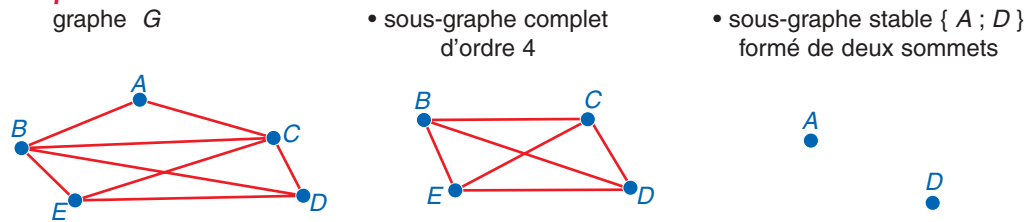
4 Coloriage des sommets d'un graphe

4.1. Sous-graphe

Définitions

Un **sous-graphe** d'un graphe est un graphe composé de sommets de G et de certaines arêtes qui relient ces sommets.
 Un sous-graphe est dit **stable** lorsqu'il ne comporte aucune arête, autrement dit si deux sommets quelconques ne sont pas adjacents.

Exemples :

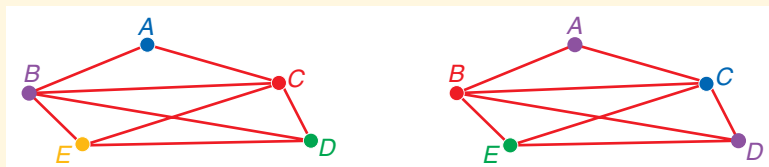


Remarque : un sous-graphe composé de k sommets du graphe et de toutes les arêtes du graphe reliant ces k sommets est un **sous-graphe engendré** par ces k sommets.

4.2. Nombre chromatique d'un graphe

Définitions

Colorier les sommets d'un graphe G non orienté, c'est leur attribuer une couleur de façon à ce que deux sommets adjacents ne soient pas coloriés de la même couleur.
 Un même graphe G peut être colorié de plusieurs façons différentes :



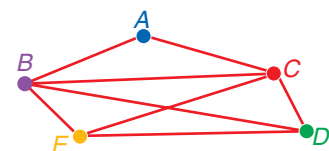
Le **nombre minimal** de couleurs nécessaire est le **nombre chromatique** du graphe, noté $\gamma(G)$.

Théorèmes

Le nombre chromatique d'un graphe **complet** est égal à **l'ordre du graphe**.
 Soit D le degré maximal des sommets d'un graphe G , alors $\gamma(G) \leq 1 + D$.
 Soit p l'ordre d'un **sous-graphe complet d'ordre maximal** contenu dans un graphe ; le nombre chromatique d'un graphe est **supérieur ou égal à** p : $p \leq \gamma(G)$.

Exemple :

Pour le graphe G , le degré maximal des sommets est 4, on a donc $\gamma(G) \leq 5$.
 On considère le sous-graphe G' , formé des sommets B, C, D et E . Ce sous-graphe est complet et chaque sommet étant adjacent aux autres sommets, il faut choisir une couleur différente pour chaque sommet, donc $\gamma(G') = 4$. On en déduit que $4 \leq \gamma(G)$.
 Or, précédemment, on a trouvé que $\gamma(G) \leq 5$, donc le nombre chromatique $\gamma(G)$ est tel que $4 \leq \gamma(G) \leq 5$.



G. Colorier un graphe

Méthode

Pour colorier les sommets d'un graphe :

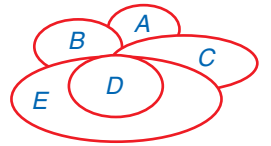
- ① Indiquer le degré maximal D , et trouver le **sous-graphe complet** d'ordre maximal p ; en déduire un encadrement du nombre chromatique : $p \leq \gamma(G) \leq 1 + D$.
- ② Appliquer l'algorithme de WELSH et POWELL :
 - Ⓐ on dresse le tableau des sommets et de leurs degrés dans l'**ordre décroissant des degrés** (il peut y avoir plusieurs listes possibles) ;
 - Ⓑ on attribue une **couleur C1** au premier sommet de la liste, et on attribue cette **même couleur** aux sommets qui ne lui sont **pas adjacents** ;
 - Ⓒ on attribue une **couleur C2** au premier sommet non colorié de la liste et on recommence comme en Ⓑ tant qu'il reste des sommets non coloriés dans la liste.

Comme on a trouvé un coloriage de m couleurs, le nombre chromatique est inférieur ou égal à m !

- ③ On obtient ainsi un encadrement : $p \leq \gamma(G) \leq m$ qui permet souvent de déterminer la valeur du nombre chromatique.

Voir exercices 63 à 67

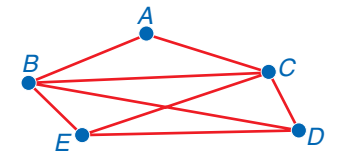
Énoncé : La carte d'une région est formée de cinq zones A, B, C, D et E disposées comme l'indique le plan ci-contre.
 On veut colorier cette carte de telle sorte que deux zones limitrophes ne soient pas de la même couleur.



Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaires ?

Résolution :

① Le graphe associé à ce plan est le graphe G ci-contre.
 On a démontré que $4 \leq \gamma(G) \leq 1 + 4$.



► voir cours, p. 218

Algorithme de WELSH et POWELL :

③ Les degrés des sommets du graphe G sont :

sommet	A	B	C	D	E
degré	2	4	4	3	3

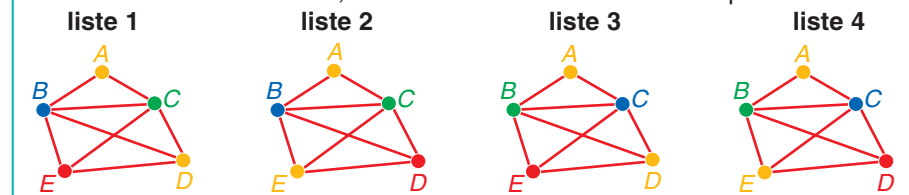
On peut ordonner ces sommets selon les listes possibles :

- liste 1 : B, C, D, E, A liste 2 : B, C, E, D, A
 liste 3 : C, B, D, E, A liste 4 : C, B, E, D, A

- Ⓑ Dans la liste 1, on colore en bleu le sommet B . B est adjacent à tous les autres sommets, donc aucun autre sommet n'est colorié en bleu.
 Ⓒ On colore en vert le sommet C ; C est adjacent à tous les autres sommets, donc aucun autre sommet n'est colorié en vert.
 On colore en orange le sommet D ; D est adjacent à E , mais n'est pas adjacent à A , donc on colore en orange le sommet A .
 On revient au sommet E non colorié, on colore le sommet E en rose.

sommet	B	C	D	E	A
degré	4	4	3	3	2
couleur	bleu	vert	orange	rose	orange

Suivant la liste de sommets, on obtient différentes colorations possibles :



③ On a ainsi colorié le graphe G avec 4 couleurs : $m = 4$.
 Donc $\gamma(G) \leq 4$.

Or, en utilisant le sous-graphe complet, on a trouvé $4 \leq \gamma(G)$.
 Ainsi on obtient l'encadrement $4 \leq \gamma(G) \leq 4$, ce qui donne $\gamma(G) = 4$.
 Il suffit d'utiliser 4 couleurs différentes pour colorier le graphe G .

Ce problème est inspiré d'une question formulée, en 1852, dans une lettre de A. DE MORGAN, professeur à Londres, à W.R. HAMILTON (1805-1865).
 « Quatre couleurs suffisent-elles pour colorier une carte de géographie de manière à ce que deux régions limitrophes ne soient pas coloriées de la même couleur ? »
 Ce n'est qu'au mois d'août 1976 que les Américains K. APPEL et W. HAKEN, purent donner une réponse positive, en utilisant l'informatique.
 C'est la première fois qu'un théorème fut démontré par cette voie.

1 Calculatrice : éditer la matrice associée à un graphe

1.1. Étudier l'exemple

Un étudiant s'aperçoit qu'il lui reste très peu de temps pour réviser un test sur les six chapitres étudiés depuis le début de l'année.

Les chapitres ne sont pas indépendants entre eux (voir tableau ci-contre).

Dessiner le graphe représentant les liens entre les chapitres, et entrer, dans la calculatrice, la matrice associée.

chapitre	chapitres à voir avant
1	
2	
3	1
4	3 ou 5
5	2 ou 3
6	3 ou 4 ou 5

• Sur T.I. : **MATRIX** **EDIT**

1:[A] **ENTER**
Entrer la dimension de la matrice :

6 **▶** 6 **ENTER**

puis entrer les éléments par :

0 **ENTER** 0 **ENTER** etc et **QUIT**



Rappeler la matrice à l'écran :

• Sur T.I. : **MATRIX**

NAMES 1:[A] **ENTER**

• Sur Casio : **MENU** **MAT** **EDIT** **OPTN**

Entrer la dimension de la matrice :

Mat A **▶** 6 **▶** 6 **EXE**

Entrer les éléments par :

0 **EXE** 0 **EXE** etc. et **EXIT**

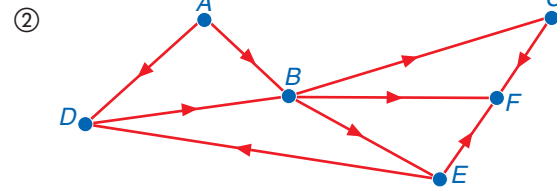
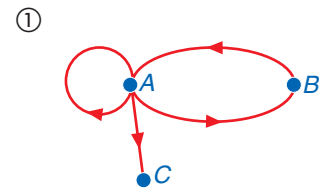
Rappeler la matrice à l'écran :

• Sur Casio : **MENU** **RUN** **X=1** **▶**

OPTN **F2** **MAT** **F1** **Mat** **ALPHA** **A** **EXE**

1.2. Applications

Éditer les matrices associées aux graphes suivants :



2 Déterminer le nombre de chaînes de longueur p

2.1. Étudier l'exemple

Reprendre l'exemple précédent. Une heure est nécessaire pour réviser un chapitre.

L'étudiant peut-il commencer la révision du chapitre 6 après avoir travaillé au plus trois heures ? Comme le chapitre 6 nécessite de connaître les chapitres 1 et 2, on cherche le nombre de chaînes orientées de longueur au plus 3 entre les sommets 1 et 6 ou entre les sommets 2 et 6.

a) Rappeler la matrice A à l'écran, puis calculer la somme $A + A^2 + A^3$ et la stocker dans la matrice B .

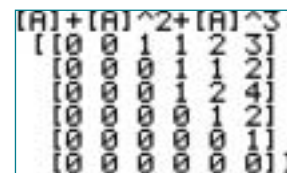
b) Lire le nombre de chaînes de longueur au plus 3 par : p_{16} entre les sommets 1 et 6 et p_{26} entre les sommets 2 et 6.

c) En déduire le nombre de façons qu'a cet étudiant pour organiser ses révisions avant de réviser le chapitre 6.

Pour lire l'élément d'une matrice :

• Sur T.I. : **[B]** (1, 6) **ENTER**

• Sur Casio : **Mat** **[B]** **[1, 6]** **EXE**



2.2. Applications

Dans le graphe ② de l'application précédente donnant le sens de circulation des rues d'un lotissement, déterminer le nombre de trajets qui partent de A et arrivent à F en suivant :

- a) deux rues ;
- b) trois rues ;
- c) quatre rues.

Objectif : éditer une matrice sur une calculatrice

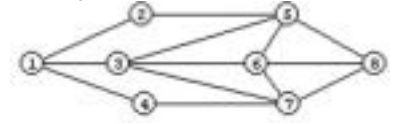
Objectif : savoir lire les éléments d'une matrice pour connaître le nombre de chaînes de longueur p donnée reliant deux sommets

Ce logiciel a été inventé par le russe Vitaly PECHENKIN

3 Utiliser le logiciel GRIN

Une base de loisirs décide d'ouvrir un petit parc d'attractions. Plusieurs activités seront proposées, mais le directeur souhaite que deux activités du même type ne soient pas voisines, c'est-à-dire ne soient pas reliées par une même allée.

Le plan du terrain destiné à ce parc est schématisé par le graphe ci-contre. Une arête représente une allée et un sommet représente le lieu où se déroulera l'activité.



3.1. Travail sur papier

1° Déterminer le nombre minimal d'activités que le directeur du parc de loisirs peut proposer. Justifier la réponse.

2° Un éventuel visiteur peut-il parcourir chacune des allées entre l'activité ① et l'activité ⑧ une fois et une seule ? en partant de l'activité ① et en revenant à l'activité ① ? Si oui, proposer un trajet possible.

3.2. Travail avec le logiciel Grin http://www.geocities.com/pechv_ru/

1° Dessin d'un graphe

a) Cliquer sur l'icône pour placer un sommet, puis recommencer sept autres fois pour placer les autres sommets.

b) Cliquer sur l'icône , sur le sommet ①, puis sur le sommet ② pour dessiner l'arête joignant ces deux sommets.

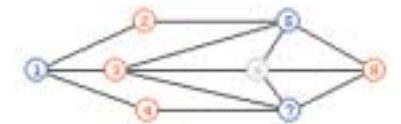
Répéter la manipulation pour construire le graphe ci-dessus.

2° Déterminer le nombre minimal d'activités revient à déterminer le nombre chromatique du graphe. Pour obtenir le nombre chromatique du graphe :

Property ▶ Graph ▶ Point Coloration (Min)

Le logiciel propose la coloration du graphe, ci-dessous :

Chromatic Number = 3
Minimal Point's Coloration is :
Point 1 2 3 4 5 6 7 8
Color 2 1 1 1 2 3 2 1



- a) Retrouve-t-on le même coloriage que par l'algorithme ?
- b) Combien d'activités différentes le directeur peut-il proposer ? Proposer une répartition des attractions au directeur.

3° On cherche s'il existe une chaîne eulérienne entre les sommets ① et ⑧, puis un cycle eulérien. Pour cela :

Property ▶ Graph ▶ Eulerian Path

Le logiciel propose la chaîne eulérienne entre les sommets ① et ⑧ :

Eulerian Path :
8 7 6 5 8 6 3 7 4 1 3 5 2 1

Proposer une autre chaîne eulérienne si possible.

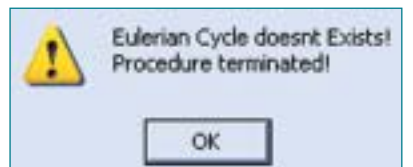
Property ▶ Graph ▶ Eulerian Cycle

Le graphe ne contient pas de cycle eulérien.

■ Pour aller plus loin :

Property ▶ Graph ▶ Quick Metrics

affiche toutes les propriétés métriques du graphe : le diamètre du graphe, les degrés des sommets, etc.



L'icône permet d'orienter les arêtes du graphe

File ▶ Options...

permet de choisir la représentation des sommets et la couleur des arêtes

View ▶

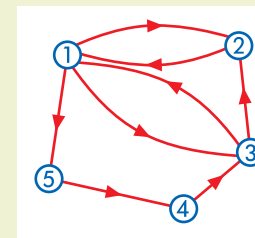
Show Point Name permet de choisir le nom du sommet et sa couleur

Savoir	Comment faire
déterminer l'ordre d'un graphe	L'ordre d'un graphe est égal au nombre de sommets du graphe ▶ Voir cours 1, p. 212
déterminer le degré d'un sommet	Le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité ▶ Voir cours 1, p. 212
calculer le nombre d'arêtes du graphe	La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du nombre total d'arêtes ▶ Voir cours 1, p. 212
reconnaître un graphe complet	Un graphe complet est un graphe dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres Le degré de chacun des sommets d'un graphe complet d'ordre n , est $n - 1$ ▶ Voir cours 1, p. 212
reconnaître un graphe connexe	Un graphe est connexe lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets ▶ Voir cours 2, p. 214
déterminer l'existence d'un cycle eulérien ou d'une chaîne eulérienne	Un cycle dans un graphe est une chaîne dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes toutes distinctes Un graphe admet un cycle eulérien si, et seulement si : ce graphe est connexe et tous ses sommets sont de degré pair Un graphe admet une chaîne eulérienne entre les sommets A et B si, et seulement si, ce graphe est connexe et les sommets A et B sont les deux seuls sommets de degré impair ▶ Voir cours 2, p. 214
déterminer la longueur d'une chaîne, la distance entre deux sommets et le diamètre d'un graphe	La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes constituant la chaîne La distance entre deux sommets d'un graphe connexe est la longueur de la chaîne qui les relie, ayant le moins d'arêtes Le diamètre d'un graphe connexe est la plus grande distance constatée entre deux sommets de ce graphe parmi toutes les paires de sommets ▶ Voir cours 3, p. 216
écrire la matrice associée à un graphe	On considère un graphe à n sommets dont les sommets sont ordonnés La matrice associée à un graphe d'ordre n est la matrice carrée A de dimension $n \times n$, dont l'élément a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j ▶ Voir cours 3, p. 216
calculer le nombre de chaînes de longueur p	L'élément p_{ij} de la matrice A^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i et j ▶ Voir cours 3, p. 216
colorier un graphe	Colorier les sommets d'un graphe G non orienté, c'est leur attribuer une couleur de façon à ce que deux sommets adjacents ne soient pas coloriés de la même couleur ▶ Voir cours 4, p. 218
déterminer le nombre chromatique	Le nombre minimal de couleurs nécessaire est le nombre chromatique du graphe, noté $\gamma(G)$ Si G' est un sous-graphe complet d'ordre p maximal, $p \leq \gamma(G)$ L'algorithme de WELSH-POWELL donne un nombre de couleurs $m : \gamma(G) \leq m$ et si ce nombre de couleurs m est égal à p , alors $\gamma(G) = m = p$ ▶ Voir cours 4, p. 218 et application G, p. 219

1. VOCABULAIRE DE BASE

1. Q.C.M. et VRAI-FAUX

1 Q.C.M. Trouver toutes les bonnes réponses.
On donne le graphe ci-contre.



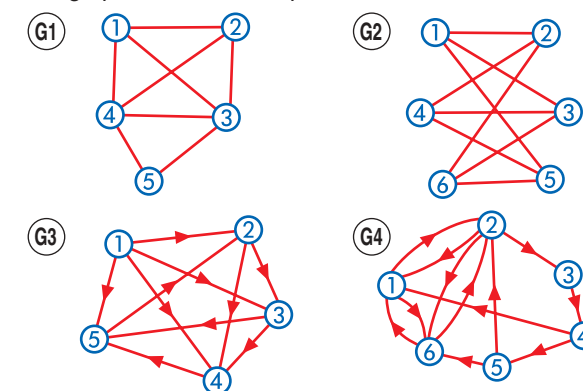
- 1° Ce graphe est un graphe :
a) simple b) orienté
c) non orienté
- 2° L'ordre du graphe est :
a) 5 b) 4
c) 3
- 3° Le nombre d'arêtes du graphe est :
a) 6 b) 7 c) 8
- 4° Pour que ce graphe soit complet, il faut ajouter :
a) 10 arêtes b) 4 arêtes c) 8 arêtes
- 5° Si on ajoute une boucle au sommet 3, ce sommet a pour degré :
a) 4 b) 5 c) 6
- 6° Les sommets cités sont adjacents :
a) 1 et 3 b) 2 et 4 c) 2 et 3

- 2 VRAI ou FAUX. Si l'affirmation est fautive, la corriger ; si elle est vraie la justifier par une définition ou une propriété.
a) Dans un graphe orienté, lorsque l'on choisit deux sommets, on ne peut pas avoir deux arêtes reliant l'un de ces sommets à l'autre.
b) Dans un graphe complet, tous les sommets sont adjacents.
c) Dans le graphe complet d'ordre 6, il y a 20 arêtes.
- 3 VRAI ou FAUX. Corriger les réponses fausses.
a) Deux sommets joints par au moins une arête sont dits liés.
b) Un graphe simple n'a pas de boucle.
c) L'ordre d'un graphe est le nombre de ses arêtes.
d) Un graphe simple non orienté d'ordre 3 admet au plus 3 arêtes.
e) Le graphe complet d'ordre 4 est un quadrilatère.
f) Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

2. Applications directes

A. Décrire un graphe, p. 213

4 Pour chacun des graphes suivants, donner l'ordre du graphe, le degré des sommets 1 et 5, le nombre d'arêtes. Ces graphes sont-ils complets ?



5 Quel est le degré de chacun des sommets d'un graphe complet d'ordre 6 ?
Quel est le nombre d'arêtes de ce graphe ?

6 Un cube peut être considéré comme un graphe.
Quel est l'ordre du graphe ?
Quel est le degré de chacun de ses sommets et le nombre d'arêtes de ce graphe ?
Ce graphe est-il complet ? Si non, combien d'arêtes doit-on ajouter pour qu'il devienne complet ?

B. Traduire une situation par un graphe, p. 213

- 7 Peut-on construire un graphe dont les degrés des sommets sont :
a) 5 ; 7 ; 3 ; 3 ; 2 ? b) 2 ; 3 ; 3 ; 12 ? c) 0 ; 0 ; 0 ; 2 ?
- 8 Peut-on construire un graphe simple d'ordre 7 ayant 10 arêtes, un seul sommet de degré 6 et les autres de degré impair (pas forcément le même) ?
Construire un tel graphe si cela est possible.
- 9 Peut-on construire un graphe simple d'ordre 8 ayant 14 arêtes, exactement deux sommets de degré 3, deux sommets de degré 4, un sommet de degré 7 et les autres sommets de degré impair ?
- 10 1° Peut-on construire un graphe simple d'ordre 6 ayant 12 arêtes, exactement un sommet de degré 5, trois de degré 3 et les autres de degré pair ?
Si oui, dessiner le(s) graphe(s) solution(s).
2° Si cela est possible, construire un graphe simple d'ordre 6 ayant 7 arêtes, un sommet au moins de degré 4, trois autres sommets de degré pair et deux sommets de degré impair.
- 11 Peut-on installer 9 ordinateurs de telle sorte que chaque ordinateur soit relié à 3 autres postes ?
- 12 Sept amis se rencontrent dans une soirée, combien de poignées de mains sont alors échangées ?

3. Approfondissement

1. Traduire par un graphe

13 1° Dessiner tous les graphes ayant trois sommets :

- a) sans nommer les sommets ;
- b) en nommant a , b et c , les trois sommets.

2° Dessiner tous les graphes ayant 4 sommets sans nommer les sommets.

3° Dessiner tous les graphes simples non orientés, complets, d'ordre 2, 3, 4 et 5.

14 On donne sept verbes conjugués : aimait, lisait, chantions, a vécu, avons mangé, apprenions, viendrons.

Dessiner deux graphes qui traduisent les relations suivantes entre deux sommets :

- a) « est conjugué au même temps que » ;
- b) « est conjugué à la même personne que ».

15 Voici un ensemble de termes qui désignent actuellement, en France, des électeurs et des élus : sénateurs, citoyens inscrits sur les listes électorales, députés, conseillers généraux, conseillers municipaux, conseillers régionaux, délégués des conseils municipaux.

Représenter par un graphe la relation définie dans cet ensemble par « élisent directement ».

16 Jérémie souhaite organiser un tournoi de baby foot entre 6 joueurs où chacun d'eux joue 4 parties.

- a) Traduire la situation par un schéma. Montrer que le tournoi ne peut pas être organisé.
- b) Combien de parties doit jouer chaque participant pour que le tournoi soit possible ?

17 Dans une assemblée de n personnes, est-il vrai qu'il y a toujours au moins deux personnes qui connaissent le même nombre de personnes ? On admet que si A connaît B , alors B connaît A .

1° Traduire la situation par un graphe : un sommet représente une personne et deux sommets sont adjacents lorsque deux personnes se connaissent.

2° Montrer que l'exercice revient à chercher s'il existe des graphes dont tous les sommets ont des degrés différents. Conclure.

18 **Jeux de plage avec 2 cailloux blancs et 3 noirs**
Règle du jeu : prendre un seul caillou, ou prendre deux cailloux de couleurs différentes.
 Marc et Félix jouent chacun leur tour : le joueur qui gagne est celui qui ramasse les derniers cailloux.

1° Représenter tous les enchaînements possibles du jeu à l'aide d'un graphe : une étape du jeu sera représentée par un couple $(i; j)$, où i désigne le nombre de cailloux blancs restants et j le nombre de cailloux noirs restants.

2° En combien de coups le jeu s'arrête-t-il obligatoirement ? Quel est le minimum de coups à jouer pour que l'un des deux joueurs gagne ?

3° Représenter le jeu lorsqu'il y a un caillou blanc de plus. Reprendre la question 2°.

19 Un grand magasin embauche cinq étudiants : A , B , C , D et E , pour compléter l'équipe de caissières pour la fin de l'année.

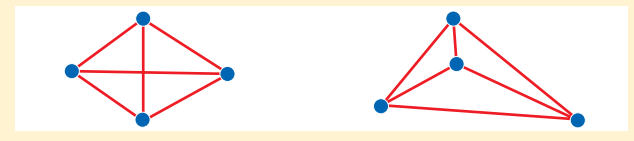
Le responsable envisage de les affecter aux caisses ①, ②, ③, ④ et ⑤, mais il estime qu'il ne pourra affecter, d'une part, ni B , ni E aux caisses ① et ②, et, d'autre part, ni C , ni D aux caisses ④ et ⑤.

Représenter par un graphe les différentes possibilités d'affectation des étudiants.

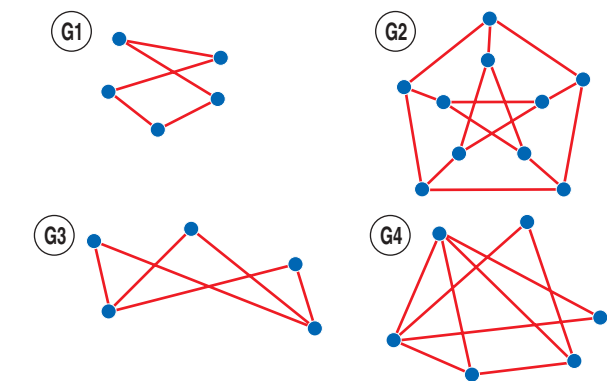
2. Graphes planaires

Définition : Un graphe est dit **planaire** s'il admet une représentation, où les arêtes ne se coupent pas.

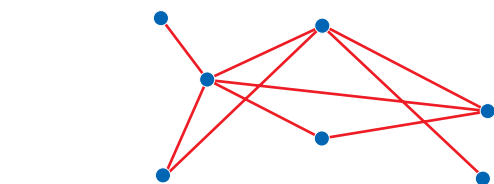
Exemple : Voici deux représentations du même graphe : La représentation de droite est un graphe planaire.



20 Les graphes suivants sont-ils des graphes planaires ?



21 Décrire le graphe ci-dessous et en donner une représentation planaire.

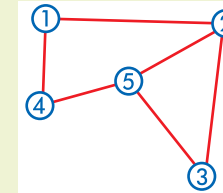


22 Un cube, formé de ses sommets et arêtes, est un graphe. Peut-on donner une représentation planaire ?

2. CHAÎNE ET CYCLE EULÉRIENS

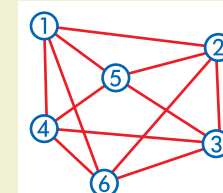
1. Q.C.M. ou VRAI-FAUX

23 **VRAI ou FAUX.** Justifier le choix. On donne le graphe ci-contre.



- a) La chaîne 1-4-5-3-2-1 est une chaîne eulérienne.
- b) La chaîne 2-3-5-4-1-2-5 est une chaîne eulérienne.
- c) La chaîne 5-2-1-4-5-3-2 est une chaîne eulérienne.
- d) La chaîne 2-5-3-2-5 est eulérienne.
- e) La chaîne 5-4-1-2-3-5-2 est eulérienne.

24 **Vrai ou Faux.** Justifier le choix. On donne le graphe ci-contre.

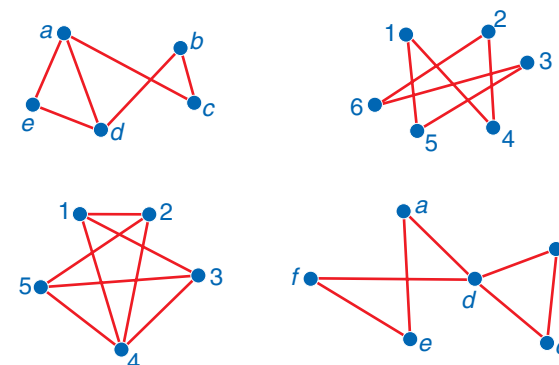


- a) La chaîne 1-2-3-6-4-3-5-4-1-2-5-3 est une chaîne eulérienne.
- b) La chaîne 1-5-4-3-2-5-1 est un cycle.
- c) La chaîne 4-5-3-2-5-1-4 est un cycle.
- d) La chaîne 1-4-6-3-2-1-5-4-3-5-1 est un cycle eulérien.
- e) La chaîne 2-5-4-1-2-3-5-2 est un cycle.

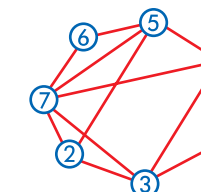
2. Applications directes

C. Prouver l'existence d'un cycle eulérien ou d'une chaîne eulérienne, p. 215

25 Dans chacun de ces graphes, chercher s'il existe une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

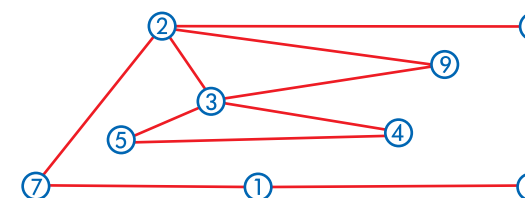


26 Dans le graphe ci-contre, si elle existe, trouver une chaîne eulérienne :



- a) d'extrémités ⑦ et ② ;
- b) d'extrémités ② et ③ ;
- c) d'extrémités ④ et ⑤ .

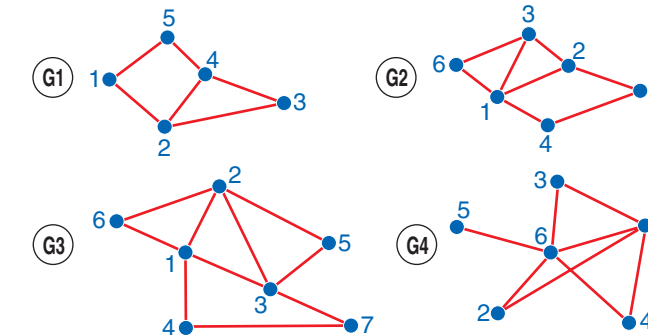
27 Le graphe ci-dessous admet-il une chaîne eulérienne ? un cycle eulérien ?



D. Mettre en évidence une chaîne eulérienne, p. 215

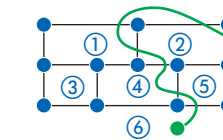
28 En appliquant les théorèmes, indiquer, pour chaque graphe, s'il existe une chaîne eulérienne entre deux sommets ou un cycle eulérien.

Dans le cas où ils existent, les décrire par la liste ordonnée de sommets.

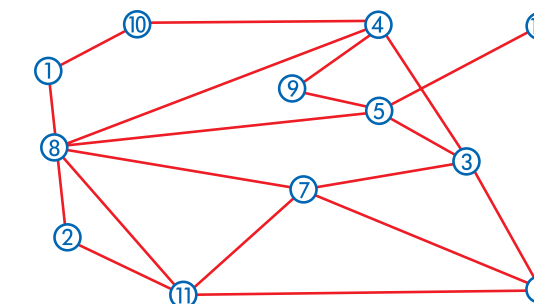


29 Ce plan délimite 5 rectangles (ou carrés) et une zone extérieure.

Est-il possible de fixer le départ d'un câble dans l'une de ces 6 zones et de lui faire traverser tous les segments une fois, et une seule ?



30 Décrire un cycle eulérien dans ce graphe.



3. Approfondissement

1. Graphe connexe

31 Dans une famille composée du père, de la mère et de leurs quatre enfants, on s'intéresse à la relation : « a les mêmes parents que ».

Construire le graphe représentant cette situation. Le graphe est-il connexe ?

32 On considère les 25 pays de la zone Euro en 2006, et la relation : « a une frontière commune avec ».

Le graphe représentant cette relation est-il connexe ? Pourquoi ?

2. Chaîne eulérienne

33 Construire trois graphes d'ordre 7 n'admettant ni cycle ni chaîne eulérienne.

34 a) Dans un jeu de dominos ne comportant que les chiffres 0, 1, 2 et 3, peut-on aligner tous les dominos, en faisant en sorte que deux dominos soient alignés lorsqu'ils présentent le même chiffre ?

Expliquer au mieux le raisonnement. Pourquoi peut-on ignorer les doubles ?

b) En est-il de même pour un jeu de dominos dont les chiffres vont de 0 à 6 ?

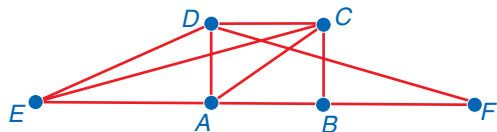
35 On donne une liste de mots ou groupe de mots : balai ; biberon ; dilue ; dindon ; eau plate ; laitue ; lubie ; lutin ; plateau ; rideau ; risotto ; rondin ; salut ; taudis ; timbale ; torride ; tu ris.

Peut-on former une phrase avec tous ces mots, sans en répéter aucun, de telle sorte que la fin d'un mot soit le début (phonétique) de l'autre ?

Bien mettre en place le raisonnement et si oui donner une « phrase » possible.

type BAC

36 Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (A, B, C, D, E et F) soient reliés par des allées selon le graphe G ci-dessous.



1° a) Dresser le tableau donnant le degré de chaque sommet.

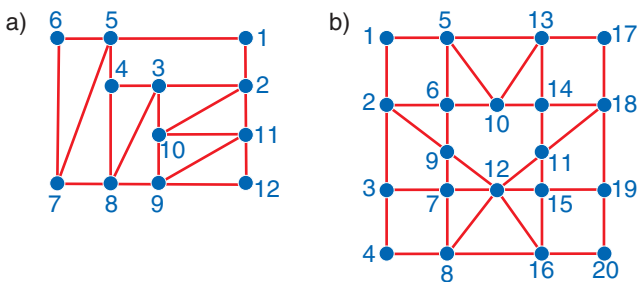
b) Le graphe G est-il connexe ? Pourquoi ?

2° Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.

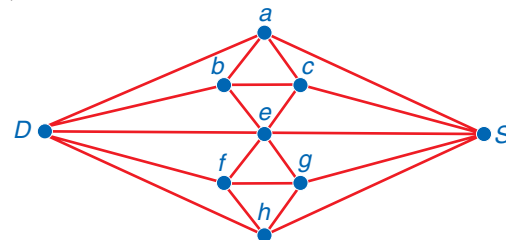
Démontrer que son souhait est réalisable, et donner un exemple d'un tel parcours.

37 Dans le réseau de rues d'une ville moderne, l'architecte a pris en compte la demande des services publics : « Pouvoir passer dans ce réseau en empruntant chaque rue, une fois et une seule, ce qui permet le nettoyage, le ramassage des poubelles, la tournée du facteur... »

Vérifier que les deux plans proposés ci-dessous remplissent le cahier des charges. Indiquer les carrefours où commence et se termine une tournée du facteur. Donner un itinéraire possible pour le facteur.

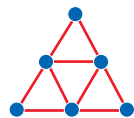


38 Le graphe ci-dessous représente les allées d'un jardin public ; les sommets sont les massifs.



Un visiteur entrant dans le jardin par la porte D désire parcourir toutes les allées du jardin pour admirer tous les massifs, avant de sortir par la porte S. Un tel parcours est-il possible ? Si oui, proposer un itinéraire pour le visiteur.

39 1° a) Dresser le tableau donnant les degrés de chacun des sommets du graphe ci-contre.



b) Le graphe admet-il un cycle eulérien ?

c) Quel est le nombre d'arêtes parcourues en suivant ce cycle ?

2° a) Quel est le degré maximal pour un sommet des graphes G2 et G3 ?



b) Quelles sont les valeurs possibles des degrés des sommets de ces graphes ?

c) Démontrer que ces graphes admettent un cycle eulérien et déterminer le nombre d'arêtes parcourues dans ce cycle.

3. MATRICE ASSOCIÉE À UN GRAPHE

1. Q.C.M. ou VRAI-FAUX

Pour les exercices 40 et 41, on considère le graphe, de sommets A, B, C, D, E, dont la matrice est :

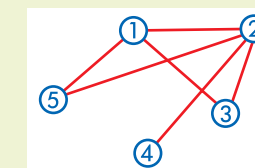
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 40 VRAI OU FAUX. Justifier si faux.
- a) Ce graphe ne contient pas de boucle.
 - b) Ce graphe est un graphe orienté.
 - c) Le degré du premier sommet est 6.
 - d) Il y a deux arêtes qui partent de B.
 - e) Il y a deux arêtes qui arrivent à B.
 - f) Le graphe contient 11 arêtes.

- 41 VRAI OU FAUX. Justifier si faux.
- a) Le graphe contient une chaîne orientée passant par tous les sommets du graphe.
 - b) Le graphe contient une chaîne orientée de longueur trois reliant le sommet A au sommet B.
 - c) Le graphe contient six chaînes orientées de longueur 5 reliant les sommets E et D.

- d) Le graphe ne contient qu'une seule chaîne orientée ayant B pour sommet final.
- e) Le graphe contient au moins un cycle orienté de longueur trois.
- f) Le graphe contient un cycle orienté passant par B.

42 VRAI OU FAUX. On appelle M la matrice associée au graphe G ci-dessous.

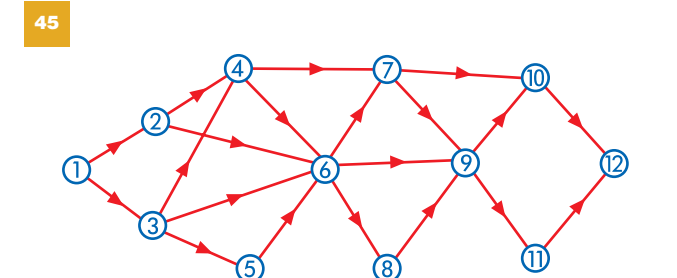
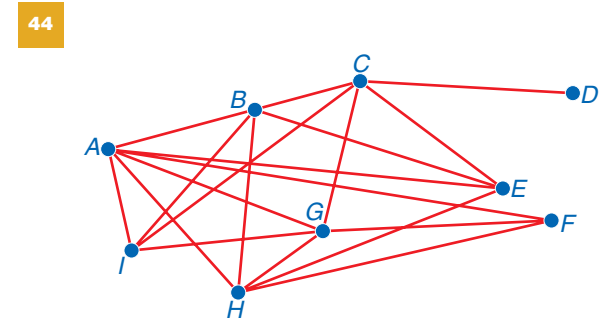
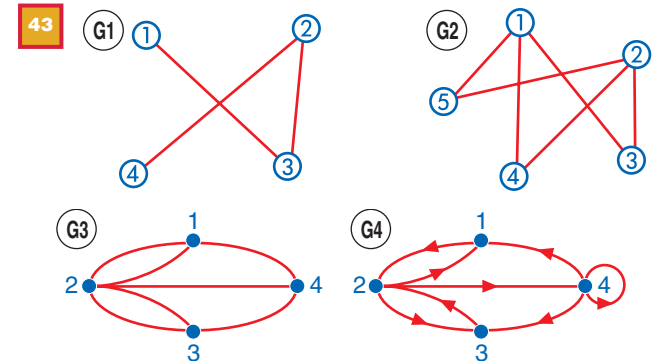


- a) La matrice M est une matrice carrée d'ordre 5.
- b) La matrice M est symétrique.
- c) La diagonale de la matrice M est formée uniquement de 1.
- d) La première ligne de la matrice est (0 1 0 1 0).
- e) La somme des éléments de la première colonne est 3.
- f) L'élément p₄₄ de la matrice M⁵ est égal à 4.

2. Applications directes

E. Faire le lien entre graphe et matrice, p. 217

Dans les exercices 43 à 45, donner la matrice des graphes.



46 On considère la matrice ci-contre.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tracer le graphe associé, de sommets : ①, ②, ③ et ④.

b) Trouver un cycle passant par le sommet ① et utilisant le maximum d'arêtes.

47 On considère le graphe associé à la matrice ci-contre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Ce graphe est-il orienté ? Justifier la réponse.

b) Quel est le nombre de ses arêtes ? Expliquer comment l'obtenir. A-t-il des boucles ? Si oui, lesquelles ? Justifier.

48 Dans chaque cas, dessiner le graphe associé à la matrice. Est-il connexe ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si oui, existe-t-il une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien ?

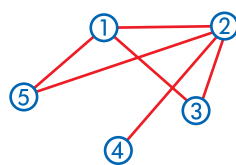
49 La matrice ci-dessous est celle d'un graphe.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sans dessiner le graphe, expliquer pourquoi il est connexe et contient une chaîne eulérienne.

F. Déterminer le nombre de chaînes de longueur p , p. 217

50 Soit le graphe ci-contre.



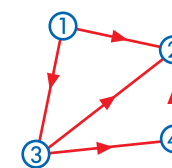
- Donner la matrice de ce graphe.
- Citer une chaîne de longueur 4 reliant les sommets ① et ④.
- Citer une chaîne de longueur 6 reliant les sommets ④ et ①.

51 On considère le graphe dont la matrice est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ce graphe est-il orienté ? Pourquoi ?
- Dessiner ce graphe de sommets 1, 2, 3, 4 et 5.
- Combien y a-t-il de chaînes de longueur 5, allant du sommet ⑤ vers le sommet ③ ? Les citer.

56 Écrire la matrice A du graphe orienté donné ci-contre.

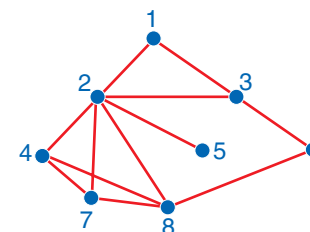


Construire le graphe de même ordre dont les arêtes sont orientées dans le sens contraire, et écrire sa matrice B . Quel est le lien entre A et B ?

Donner la matrice C du graphe non orienté obtenu en effaçant le sens de parcours.

Calculer $A + B$ et comparer le résultat à C .

57 On considère le graphe G ci-dessous.



- Écrire la matrice A associée au graphe G .
- Dans ce graphe G , en utilisant certains sommets et toutes les arêtes du graphe qui relient ces sommets, trouver un graphe complet d'ordre le plus grand possible. Citer les sommets de ce graphe complet.

58 Florent, Anne, Yannick et Julien partent en randonnée. Ils ont choisi cinq étapes et les itinéraires à suivre pour que la randonnée soit la plus agréable possible. Les itinéraires sont représentés sur un graphe dont les sommets sont nommés A, B, C et D . Dans la matrice associée à ce graphe, $a_{ij} = 1$, s'il existe un parcours intéressant de i vers j :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dessiner le graphe associé à la matrice M .
- Les amis peuvent-ils parcourir tous les chemins une seule fois et revenir à leur point de départ A ?
- Chaque trajet entre deux étapes est d'environ 4 km. Peuvent-ils partir et revenir en A après avoir parcouru 20 km ? Proposer un itinéraire possible.

59 Un graphe G de sommets A, B, C et D est défini par sa matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pourquoi peut-on affirmer que le graphe G est un graphe orienté ? Déterminer le degré de chacun de ces sommets.
- La matrice contient une colonne composée uniquement de zéros, en donner une interprétation. Existe-t-il une chaîne orientée reliant les sommets D et B ?

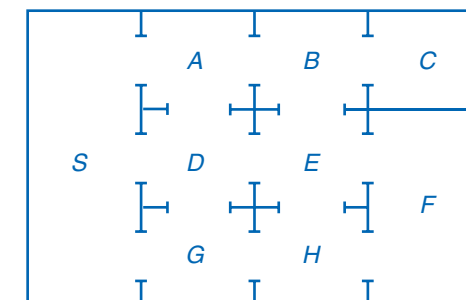
3° Représenter le graphe G associé à la matrice M ?

4° Citer toutes les chaînes orientées de longueur 3 reliant le sommet C et le sommet A .

5° Sans calculer la matrice M^5 , expliquer pourquoi cette matrice contient encore une colonne composée uniquement de zéros.

6° Calculer M^5 , puis déterminer le nombre de chaînes de longueur 5 reliant le sommet B au sommet A ?

60 Un musée est composé de 9 salles notées S, A, B, C, D, E, F, G et H . Le plan est donné ci-dessous.



Chaque ouverture entre deux salles est une porte de communication. On s'intéresse au parcours d'un visiteur sans se préoccuper de la manière dont ce visiteur accède au musée, ni comment il en sort.

- Dessiner le graphe modélisant la situation. On précisera les sommets et la signification d'une arête.
 - Est-il possible de visiter ce musée en empruntant chaque porte une fois et une seule ? Justifier par un théorème du cours.

2° On note M la matrice associée à ce graphe. Écrire la matrice M en suivant l'ordre des salles : S, A, B, C, D, E, F, G et H .

Ce graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?

3° On donne la matrice M^4 :

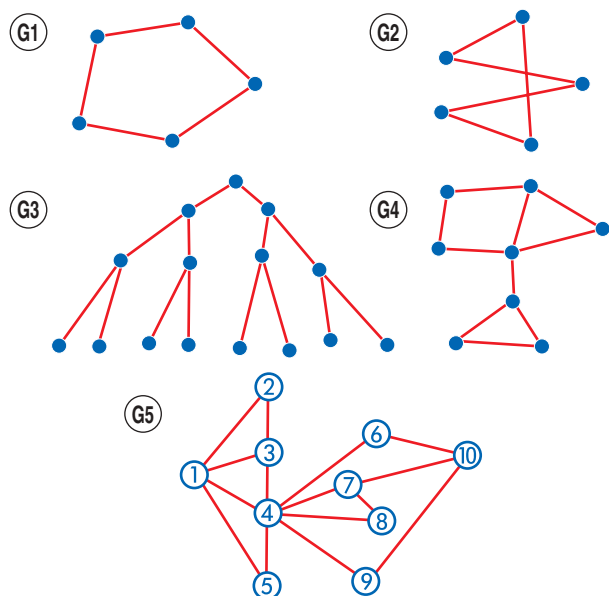
$$M^4 = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 11 & 02 & 20 & 12 & 06 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 03 & 06 & 11 & 20 & 05 & 18 & 05 \\ 11 & 03 & 16 & 00 & 19 & 03 & 08 & 04 & 12 \\ 02 & 06 & 00 & 03 & 01 & 07 & 01 & 04 & 01 \\ 20 & 11 & 19 & 01 & 31 & 09 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 03 & 07 & 09 & 28 & 09 & 20 & 09 \\ 06 & 05 & 08 & 01 & 11 & 09 & 09 & 08 & 09 \\ 12 & 18 & 04 & 04 & 12 & 20 & 08 & 20 & 06 \\ 12 & 05 & 12 & 01 & 19 & 09 & 09 & 06 & 17 \end{bmatrix}$$

- Combien y a-t-il de chemins qui, en quatre étapes, partent de D et reviennent en D ?
- Combien y a-t-il de chemins qui, en quatre étapes, partent de S et reviennent à C ? Les citer.
- Est-il toujours possible de joindre en quatre étapes deux salles quelconques ? Justifier.

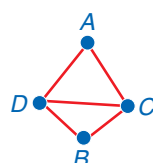
3. Approfondissement

1. Diamètre d'un graphe

52 Rechercher le diamètre de chacun des graphes suivants.

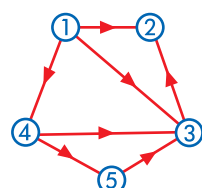


53 Déterminer le diamètre du graphe ci-contre. Combien doit-on enlever d'arêtes pour que le diamètre soit égal à 3 ?



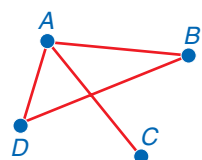
2. Chaînes de longueur p

54 On donne le graphe orienté ci-contre.



- Écrire la matrice A associée à ce graphe.
- Calculer A^4 , puis donner la signification du seul 1 qui apparaît.
- Combien y a-t-il de chaînes orientées de longueur 3 arrivant au sommet ② ? Les citer.
- Dans A^2 , existe-t-il des colonnes composées uniquement de zéros ? Si oui, en donner une signification.

55 On donne le graphe ci-contre.

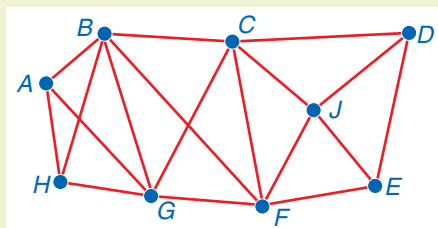


- Écrire sa matrice associée.
- Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 reliant les sommets A et C ? Les citer toutes et indiquer celle(s) composée(s) d'arêtes toutes distinctes.
- Trouver une chaîne de longueur 3 reliant les sommets C et D , composée d'arêtes toutes distinctes. La citer.
- Quelle(s) arête(s) faut-il ajouter pour obtenir un graphe complet d'ordre 4 ? Dessiner le graphe obtenu.

4. COLORIAGE DES SOMMETS D'UN GRAPHE

1. Q.C.M. ou VRAI-FAUX

61 VRAI OU FAUX. Justifier si faux. On considère le graphe ci-dessous :



- a) Ce graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 5.
- b) Le nombre chromatique γ est plus petit ou égal à 6.
- c) Le nombre chromatique γ est supérieur ou égal à 4.
- d) Les degrés des sommets sont tous égaux à 5 ou à 3.
- e) L'algorithme de WELSH et POWELL fournit trois couleurs.
- f) Le nombre chromatique γ est égal à 3.

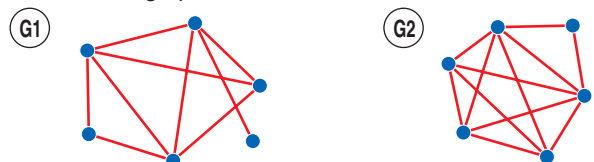
62 VRAI OU FAUX. Justifier si faux.

- a) Aligner tous les dominos comportant les chiffres 0, 1, 2 sur une table est un problème de coloriage d'un graphe.
- b) Un championnat de handball oppose 6 équipes. Chaque équipe doit affronter toutes les autres équipes. Déterminer le nombre de matchs qui seront joués est un problème de coloriage d'un graphe.
- c) On veut organiser un examen d'entrée dans une école de commerce. Quatre candidats se sont inscrits pour les épreuves suivantes : Français (F), Anglais (A), Mathématiques (M), Gestion (G), Espagnol (E), Philosophie (P) :
 $F; A; M \quad G; P \quad E; P \quad E; M$
 On cherche le nombre maximal d'épreuves que l'on peut faire passer par jour et le nombre de journées nécessaires pour faire passer cet examen. Cet exercice revient à un problème de coloriage d'un graphe.

2. Applications directes

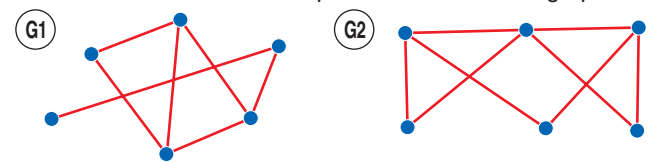
G. Colorier un graphe, p. 219

63 Donner l'ordre du sous-graphe complet d'ordre maximal de chacun des graphes suivants :

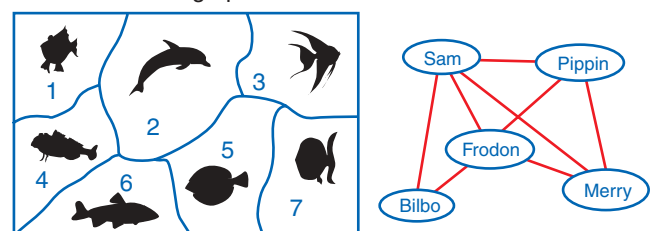


64 Justifier que le nombre chromatique des graphes ci-dessous est plus grand que 3.

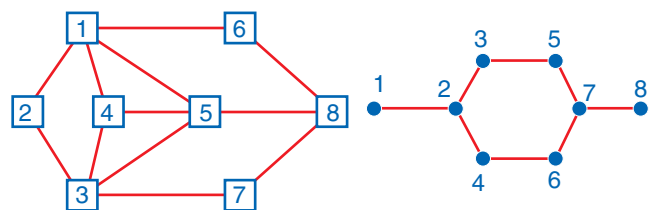
Colorier le graphe à l'aide de l'algorithme. Quel est le nombre chromatique de chacun de ces graphes ?



65 Colorier les graphes suivants :

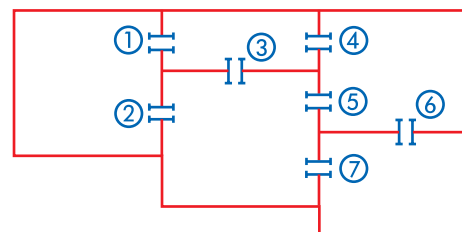


66 1° Colorier les graphes suivants :



2° Pour chacun des graphes donnés ci-dessus, rechercher un coloriage à l'aide de l'algorithme, ainsi que le nombre chromatique.

67 La surveillance des salles du musée



Il a été décidé de placer des caméras de télévision au-dessus de certaines portes de façon à balayer les deux salles communiquant par cette porte.

Chercher le nombre de caméras minimal à utiliser, tout en surveillant toutes les salles.

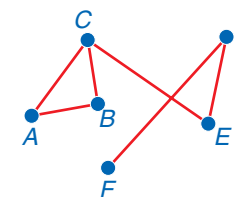
3. Approfondissement

1. Sous-graphe stable

Le coloriage des sommets d'un graphe à l'aide de k couleurs équivaut à partager ce graphe en k sous-graphes stables. Chaque sous-graphe stable est alors composé de sommets non adjacents, donc de même couleur.

68 On considère le graphe ci-dessous.

Déterminer un sous-graphe stable d'ordre 2. Existe-t-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? Donner une partition du graphe en sous-graphes stables. Proposer une coloration du graphe.



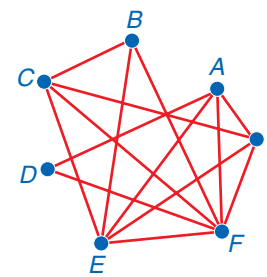
2. Applications du coloriage

69 Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle.

À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale :

Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditiâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).

Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-contre indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1° Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).

2° Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ? Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\gamma(\Gamma)$ du graphe Γ ?

3° Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ? En déduire un encadrement de $\gamma(\Gamma)$.

4° Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ .

5° Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ? Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

70 Huit jeunes hommes veulent travailler dans un hypermarché ; le responsable n'a que trois postes à fournir. Il désire tenir compte des problèmes entre eux. Adrien ne peut supporter Damien et Cyril ; Benjamin et Franck ne veulent pas travailler ensemble ; Cyril refuse de travailler avec Benjamin ; Damien ne travaille pas avec Greg ;

Erik ne veut pas travailler ni avec Benjamin ni avec Franck ni avec Hector ; Franck ne veut pas travailler avec Greg ou avec Hector ; Greg ne s'entend pas avec Adrien ; Hector refuse de travailler avec Franck ou avec Cyril.

1° Construire un graphe non orienté traduisant cette situation d'incompatibilité d'humeur.

2° a) Si le responsable veut embaucher Erik, quels sont les deux autres qu'il peut embaucher ?

b) Donner une combinaison possible de trois jeunes, autres qu'Erik, qui peuvent avoir trois emplois.

71 La matrice M ci-dessous est associée à un graphe.

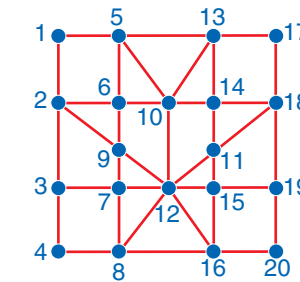
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les sommets nommés A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept personnes d'un groupe de danse, chaque personne ne connaissant que sa langue natale.

Une arête entre deux sommets signifie que les deux personnes ne peuvent pas se comprendre, car elles ne parlent pas la même langue.

- a) Construire le graphe associé à cette matrice.
- b) Citer les personnes que B ne peut pas comprendre.
- c) Justifier que A, B, E et F parlent chacun une langue autre que celle des trois autres.
- d) Y a-t-il une cinquième langue parlée par l'une des personnes de ce groupe de danse ? Justifier la réponse.

72 Les rues d'un lotissement sont données par le graphe suivant. Au moment de Noël, on désire mettre des couleurs à chaque carrefour. Peut-on utiliser 3 couleurs seulement de telle sorte que deux carrefours reliés par une rue ne soient pas de la même couleur ?



73 Dans un atelier de confection, on utilise six machines m_i pour réaliser sept travaux. Deux travaux ne peuvent être réalisés en même temps que s'ils n'utilisent pas la même machine. Chaque travail nécessite trois machines :

- ① $m_1 m_2 m_3$ ② $m_1 m_2 m_4$ ③ $m_4 m_5 m_6$
- ④ $m_3 m_5 m_6$ ⑤ $m_1 m_2 m_3$
- ⑥ $m_4 m_5 m_6$ ⑦ $m_1 m_2 m_4$

Si chaque travail a une durée de 30 min, quel est le temps minimal nécessaire pour la réalisation de ces travaux ? Donner une organisation possible de ces sept travaux.

5. EXERCICES DE SYNTHÈSE

74 On considère la matrice M ci-contre.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1° a) Ce graphe est-il orienté ?
 b) Quel est le degré du sommet 3 ?
 c) Combien d'arêtes contient ce graphe ?
 d) Ce graphe est-il connexe ? est-il complet ?

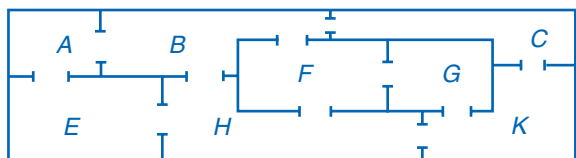
2° Construire le graphe associé à la matrice M .
 On numérotera les sommets de ① à ⑤.

3° Existe-t-il une chaîne eulérienne ? un cycle eulérien ?
 Justifier la réponse.

4° Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe, puis déterminer sa valeur.

5° a) Calculer M^2 , puis M^3 .
 b) Existe-t-il des chaînes de longueur 2 entre les sommets ① et ③ ?
 c) Combien existe-t-il de chaînes de longueur inférieure ou égale à 3 entre les sommets ① et ③ ?

75 Dans un musée, les salles communiquent par des portes ouvertes.



On mettra bien en valeur le raisonnement pour chaque question.

a) Est-il possible de visiter ce musée en empruntant chaque porte une fois et une seule ?

Si oui, préciser un ordre de visites possible.

Si non, indiquer les portes qui seront franchies deux fois.

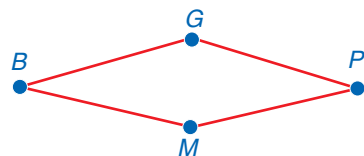
b) Le conservatoire du musée veut refaire les sols et désire mettre de la moquette dans les salles de telle façon que en franchissant une porte, la moquette change de couleur. Déterminer le nombre minimal de couleurs de moquette à choisir.

c) Si on peut entrer au départ en salle E , proposer un chemin permettant de visiter le plus de salles possibles une seule fois.

76 Promenades sur un circuit

Une station balnéaire possède des petits trains reliant les différentes curiosités de la ville. Les trains desservent la gare (G), la plage (P), le musée (M) et le belvédère (B).

Le trajet des trains est représenté par le graphe suivant.



Les trains circulent dans les deux sens entre deux arrêts. Pour emprunter le train, il faut acheter un billet par trajet entre deux arrêts.

Camille arrive à la gare. Lors d'une tombola, elle a gagné un billet gratuit valable pour 6 trajets. Elle peut ainsi visiter plusieurs fois les sites proposés avant de revenir à la gare.

1° Donner la matrice A associée à ce graphe $GPMB$.

2° a) Calculer à l'aide de la calculatrice : A^2, A^3, A^4, A^5 et A^6 .

b) Combien existe-t-il de chaînes de longueur 6 commençant et se terminant à la gare ?

c) Sans calculer les puissances de la matrice A , donner le nombre de chaînes commençant et se terminant à la gare, de longueur 9, puis de longueur 10.

3° Généralisation

Montrer que $PD = AP$, où :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

En déduire que $A = PD P^{-1}$, puis calculer A^2 et A^3 .

En déduire la matrice A^n , où n est un nombre entier naturel quelconque.

Quel est le nombre de chaînes de longueur n commençant et se terminant à la gare ?

77 Graphe orienté par niveaux – Implantation d'un magasin franchisé

Après étude, une chaîne de magasins d'habillement a décidé du nouveau quartier où elle va s'implanter.

Les tâches suivantes s'imposent :

A : recherche d'un local	F : décoration intérieure
B : recherche du franchisé	G : aménagement extérieur
C : constitution du dossier bancaire du franchisé	H : livraison et installation des articles
D : inscription à la chambre de commerce	I : campagne publicitaire
E : aménagement intérieur du local	J : ouverture du magasin

Le tableau suivant donne la tâche y à effectuer immédiatement avant la tâche x .

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
y			A; B	A; B	A	B; E	A	G; F	G	I; H; D; C

a) Représenter l'ordonnement de ces tâches par un graphe.

Définition : On appelle **niveau** d'un sommet X la longueur de la chaîne orientée la plus longue arrivant au sommet X .

b) Donner le niveau de chacun des sommets du graphe.

c) À l'aide de la calculatrice, donner la matrice M associée au graphe et calculer M^2 .

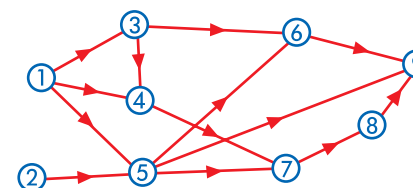
d) En utilisant la signification des éléments de M^2 , que peut-on en déduire pour les sommets ne comportant que des zéros en colonne ?

e) Calculer M^3, M^4 et M^5 et retrouver ainsi le niveau de chacun des sommets du graphe.

f) Construire le graphe orienté représentant l'ordonnement des tâches en plaçant les sommets de même niveau les uns en dessous des autres.

78 Applications des graphes orientés par niveaux

1° On donne le graphe orienté ci-dessous :



Déterminer le niveau de chacun des sommets, puis redessiner le graphe en l'ordonnant par niveaux croissants de façon à ce que tous les sommets de même niveau soient les uns en dessous des autres.

2° Le tableau suivant donne la tâche y à effectuer immédiatement avant la tâche x .

x	1	2	3	4	5	6
y		1	1; 2	2	2; 3	4; 5

Représenter l'ordonnement de ces tâches par un graphe orienté par niveaux.

79 Problème d'incompatibilité d'humeur

Lors d'un voyage, on doit loger dans le même hôtel un groupe de huit personnes.

Or, chaque personne a communiqué à l'organisatrice les noms des personnes avec qui elle ne désire pas partager la même chambre.

On nomme les huit personnes :

①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ et ⑧.

L'organisatrice a établi le tableau d'incompatibilité suivant, où une croix indique que les personnes concernées ne peuvent partager la même chambre.

Aucune condition n'est imposée concernant la nombre de personnes par chambre.

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
①		X	X				X	X
②	X		X				X	X
③	X	X		X			X	X
④			X		X			X
⑤				X		X		X
⑥					X		X	X
⑦	X	X	X			X		X
⑧	X	X	X	X	X	X	X	

Combien de chambres l'organisatrice doit-elle réserver ?

Donner alors la répartition possible des personnes dans les chambres.

80 Tuan organise un jeu de plateau.

Mais, pour former les équipes, il doit tenir compte des incompatibilités d'humeur de ses joueurs.

Il a dressé le tableau des « amis » qui ne veulent pas être dans la même équipe sous forme d'une matrice.

	Ali	Béa	Carl	Doris	Élise	Franck	Gatien	Harry	Isa	Julie	Kevin
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Un nombre 1 dans une case signifie que les « amis » ne peuvent être dans la même équipe et 0 que cela est possible.

1° a) D'après cette matrice, quels sont les sommets et la signification d'une arête du graphe correspondant ?

b) D'après la matrice, avec quels « amis » Béa ne veut pas faire équipe ?

c) Avec quels amis Ali veut-il bien jouer ?

2° Tuan peut-il serrer la main de tous ses joueurs une seule fois chacun, sous condition qu'il salut successivement deux « amis » qui ne veulent pas faire équipe ?

Expliquer le raisonnement.

3° a) Construire le graphe correspondant à cette matrice.

On nommera chaque sommet par la première lettre du prénom des joueurs.

b) Donner le sous-graphe complet d'ordre le plus grand.

Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique de ce graphe ?

c) Donner un encadrement du nombre chromatique.

4° a) Dresser une liste des sommets avec leur degré.

En déduire une coloration possible du graphe.

b) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.

c) En déduire les équipes que Tuan peut proposer pour ce jeu.

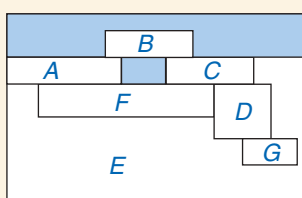
1. POUR ÊTRE AU POINT LE JOUR DU BAC

2. POUR S'EXERCER

Question	Comment faire ou rédiger ?
① Existe-t-il un trajet empruntant, une fois et une seule , toutes les arêtes du graphe	La question revient à chercher si le graphe contient une chaîne eulérienne On calcule le degré de chacun des sommets Si seulement deux sommets sont de degré impair , alors le graphe contient une chaîne eulérienne d'extrémités ces deux sommets ► Voir application C, p. 215
② Existe-t-il un trajet reliant un sommet à lui-même , en empruntant, une fois et une seule, toutes les arêtes du graphe	La question revient à chercher si le graphe contient un cycle eulérien On calcule le degré de chacun des sommets Si tous les sommets sont de degré pair , alors il existe un cycle eulérien ► Voir application C, p. 215
③ Existe-t-il une chaîne de longueur k reliant les sommets <i>i</i> et <i>j</i> du graphe	On détermine la matrice M associée au graphe On calcule à l'aide de la calculatrice M^k Le nombre de chaînes de longueur k est égal à l'élément p_{ij} , au croisement de la <i>i</i> -ième ligne et de la <i>j</i> -ième colonne, de la matrice M^k ► Voir application F, p. 217
④ Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe	On cherche le sommet de degré maximal D On cherche le sous-graphe complet d'ordre maximal p : $p \leq \chi(G) \leq 1 + D$ ► Voir application G, p. 219
⑤ Proposer un coloriage des sommets du graphe en utilisant le minimum de couleurs	On ordonne les sommets suivants les degrés décroissants dans un tableau, puis on utilise l'algorithme de WELSH et POWELL L'algorithme fournit un nombre de couleurs <i>m</i> supérieur ou égal à $\chi(G)$ On obtient alors un nouvel encadrement du nombre chromatique : $p \leq \chi(G) \leq m$ Si $m = p$, alors $\chi(G) = m = p$ ► Voir application G, p. 219

ÉNONCÉ

81 On donne la carte ci-contre de 7 pays. Les parties en bleu sont un océan ou un lac.



- Existe-t-il un parcours qui permet de franchir chacune des frontières terrestres entre deux pays une fois et une seule ? Si oui, en décrire un.
- Existe-t-il un tel parcours pour lequel le pays de départ et le pays d'arrivée sont les mêmes ?
- Combien existe-t-il de parcours permettant de relier les pays B et G en traversant 5 frontières ?
- Déterminer le nombre minimal de couleurs permettant de colorier cette carte de telle sorte que deux pays voisins par au moins une frontière n'aient jamais la même couleur.

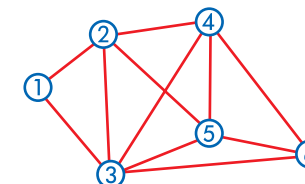
ANALYSE DE L'ÉNONCÉ

On traduit la situation par un graphe : les pays sont les sommets et une arête représente une frontière entre deux pays.

- On cherche si le graphe contient une chaîne eulérienne.
- On cherche si le graphe contient un cycle eulérien.
- On écrit la matrice *M* associée au graphe. Pour calculer le nombre de chaînes de longueur 5 entre les sommets B et G, on calcule, avec la calculatrice, M^5 .
- On cherche un encadrement du nombre chromatique du graphe, en cherchant un sous-graphe complet d'ordre maximal et en utilisant l'algorithme de WELSH et POWELL. On colorie les sommets du graphe en suivant les couleurs trouvées lors de l'algorithme.

Q.C.M. ET VRAI-FAUX ?

Dans les exercices 82 et 83, on considère le graphe ci-contre.



82 Q.C.M. Trouver toutes les bonnes réponses.

- La somme des degrés des sommets est :
 (a) 21 (b) 22 (c) 20
- Le nombre de sous-graphes complets d'ordre 3 est :
 (a) 8 (b) 9 (c) 10
- Un sous-graphe stable est :
 (a) {1 ; 4 ; 6} (b) {1 ; 6} (c) {2 ; 6}
- Entre les sommets ① et ⑥, il existe une chaîne de longueur :
 (a) 5 (b) 11 (c) 8

83 VRAI ou FAUX. Corriger si c'est faux.

- L'ordre du graphe est le degré maximal des sommets.
- Le nombre des arêtes est égal au double de la somme des degrés des sommets du graphe.
- Le graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 5.
- On peut colorer le graphe avec 5 couleurs.
- Le graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 4, donc le nombre chromatique du graphe est égal à 4.
- Il est possible de parcourir toutes les arêtes du graphe en passant, une fois et une seule, par chaque arête.
- Il existe toujours une chaîne de longueur 2 entre deux sommets quelconque du graphe.
- Il existe 48 chaînes de longueur 4 entre les sommets ① et ⑤.

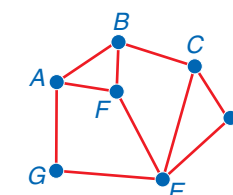
EXERCICES type BAC

84 R. O. C. (Restitution Organisée des Connaissances)

- Démontrer que la somme des degrés des sommets de degré impair est un nombre entier pair.
 - En déduire que le nombre de sommets de degré impair est pair.
- Démontrer que si un graphe complet admet un cycle eulérien, alors l'ordre de ce graphe est un nombre impair.
 - Quels sont les graphes complets qui admettent une chaîne eulérienne ?

85 Dans une ville, on s'intéresse aux principales avenues permettant de relier les différents lieux historiques notés : A, B, C, D, E, F et G.

On représente le plan de cette ville à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les lieux historiques et une arête est une avenue entre deux lieux historiques.



- Le temps moyen de parcours, en voiture, de chaque avenue est évalué à 10 minutes.
- Calculer la durée maximale du trajet entre deux lieux historiques quelconques de la ville.
 - Un touriste visitant la ville peut-il visiter tous les lieux, en empruntant chacune des avenues une seule fois ? Justifier.
 - Ce même touriste partant de A doit se rendre à D, mais il ne dispose que de 60 min. Combien existe-t-il d'itinéraires différents dont le temps de parcours est de 60 minutes ? Citer l'un de ces itinéraires passant par tous les lieux historiques.

4° Lors de la fête de la musique, chaque lieu public accueille un groupe de musiciens. Le maire décide que deux lieux reliés par une avenue ne doivent pas présenter le même genre de musique. Combien de genres musicaux différents doit on prévoir au minimum ?

86 Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

On considère le graphe *G*, associé à la matrice *M*, de sommets :

A, B, C, D et E.

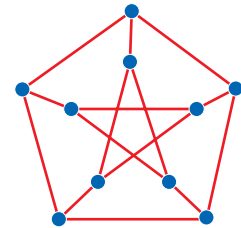
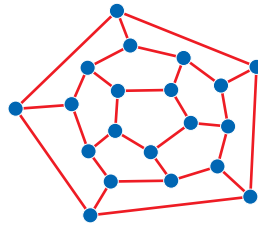
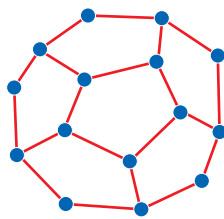
Répondre aux questions suivantes sans construire le graphe *G*, en utilisant uniquement les informations fournies par la matrice *M*.

- Le graphe *G* est-il orienté ? Calculer les degrés de chacun des sommets. Le graphe *G* contient-il une chaîne eulérienne reliant deux sommets ? Justifier les réponses.
- Citer un sous-graphe complet ayant le plus grand ordre possible. En déduire un premier encadrement du nombre chromatique χ du graphe *G*. Proposer une coloration des sommets du graphe *G*.
- À la calculatrice, calculer M^3 . Que signifie le nombre 0 obtenu sur la quatrième ligne ? Combien de chaînes de longueur 3 relient le sommet B au sommet C ?
- Construire le graphe *G*. Colorier le graphe *G* à l'aide de la coloration proposée à la question 2°. Citer toutes les chaînes de longueur 3 reliant le sommet B au sommet C.

87 Graphe Hamiltonien

Un graphe admet un **cycle hamiltonien** s'il existe un cycle qui visite tous les sommets du graphe une fois et une seule.

a) Les graphes suivants admettent-ils un cycle hamiltonien ?



Graphe de PETERSEN

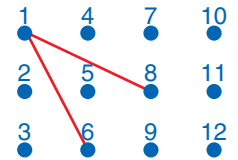
b) Dessiner un graphe hamiltonien et eulérien.

c) Sur un échiquier de taille 4×3 , un cavalier peut-il visiter toutes les cases, une fois et une seule, en partant de la case 4 ? la case 5 ? la case 1 ?

Aide :

Chaque case de l'échiquier est un sommet du graphe.

On a tracé sur le schéma ci-dessous le déplacement possible d'un cavalier partant de la case 1.

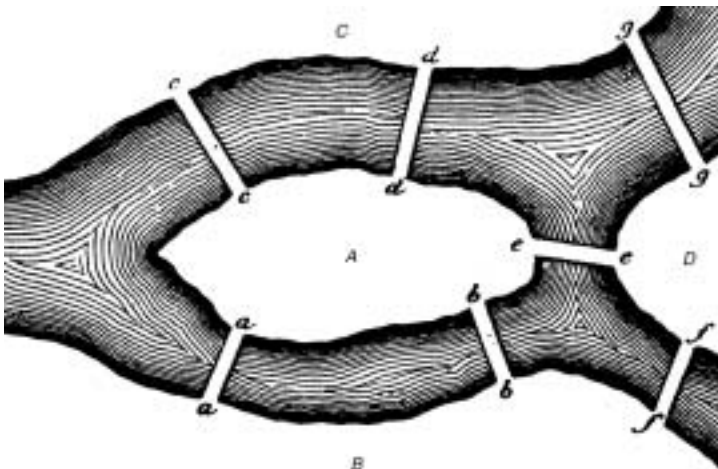


88 EULER et les ponts de Königsberg

Les quatre parties de la ville délimitées par le fleuve sont assimilées chacune à un même point de départ comme le montre la figure ci-contre.

1° Montrer que le problème posé est un problème de recherche d'un cycle eulérien dans un graphe. Dessiner ce graphe. Est-ce un graphe simple ?

2° Quelle est la réponse au problème des habitants de Königsberg ?



Note Historique : Leonard EULER (1707-1783)

Le qualificatif « eulérien » est dérivé de son nom, car il résolut le premier le problème des ponts en représentant d'une manière convenable les divers chemins.

L. EULER est né à Bâle le 15 avril 1707. Ayant rapidement montré des capacités exceptionnelles en mathématiques, à l'âge de 20 ans, il rejoint l'académie de Saint-Pétersbourg où travaillent les fils **BERNOULLI** (voir chapitre 5). La Russie est alors dans une grande confusion après la mort de l'Impératrice Catherine I. Cependant, il s'y installe, fonde une nombreuse famille et y travaille beaucoup. Il poursuit son travail à l'académie de Berlin, où il se rend en 1741 sur l'invitation du roi de Prusse Frédéric II le Grand, revient à Saint-Pétersbourg en 1766, rappelé par l'impératrice Catherine II.

Le 18 septembre 1783, suivant le mot de **CONDORCET**, « il cessa de calculer et de vivre ».

« L'analyse incarnée », disaient ses contemporains, nous a légué quantité de ce que nous apprenons : le concept de fonction avec ses notations, le calcul des dérivées, le calcul intégral, la trigonométrie, la notation « e »... Quantité de théorèmes et de formules portent son nom.