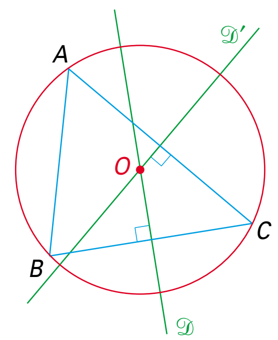
**Propriété** **Les médiatrices d'un triangle sont concourantes au centre de son cercle circonscrit.**

## Démonstration

On considère donc un triangle $ABC$ (non aplati !).

Soit $O$ le point d'intersection $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, les médiatrices respectives des segments $[BC]$ et $[AC]$.

(Ceci est possible, puisque les droites $(BC)$ et $(AC)$ ne sont pas parallèles.)




• D'après une des propriétés caractéristiques de la médiatrice, tout point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment.

On obtient alors les égalités suivantes :

$$O \in (\mathcal{D}), \quad \textbf{donc} \quad OB = OC.$$
$$O \in (\mathcal{D}'), \quad \textbf{donc} \quad OA = OC.$$

Il vient alors, par transitivité de l'égalité, $OA = OB$.

• D'après une autre propriété, tout point situé à égale distance des extrémités d'un segment appartient à sa médiatrice.

Or on a montré que l'égalité $OA = OB$.

Donc $O \in (\mathcal{D}'')$, avec $(\mathcal{D}'')$ la médiatrice du segment $[AB]$.

On a donc montré que le point $O$, défini par l'intersection de deux médiatrices, appartient à la troisième médiatrice, donc appartient aux trois médiatrices du triangle $ABC$.

***Conclusion* 1** :

Les trois médiatrices sont concourantes.

• D'autre part, le cercle de centre $O$ passant par le point $A$, passe aussi par les points $B$ et $C$.

On a donc l'égalité des distances :

$$OA = OB = OC.$$

***Conclusion* 2** :

Le point de concours des médiatrices d'un triangle est le centre de son cercle circonscrit.

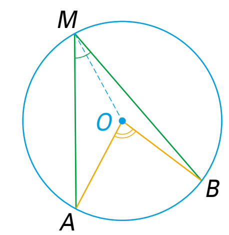
**Propriété** **Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.**

## Démonstration

Sur la figure ci-contre $A$, $B$ et $M$ sont trois points sur le cercle de centre $O$. Il y a alors deux cas à distinguer :

soit $O$ est intérieur au triangle $ABM$,

soit il est extérieur au triangle $ABM$.




1) On suppose que le point $O$ soit intérieur au triangle $ABM$.

• Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AMB}$, interceptant le même arc, sont marqués sur la figure.

On note $\alpha = 360 - \widehat{AOB}$ (0).

On a aussi $\alpha = \widehat{AOM} + \widehat{MOB}$ (1).

Or le triangle $MOA$ est isocèle en $O$, donc :

$$\widehat{MAO} = \widehat{AMO}.$$

Donc : $\widehat{AOM} = 180 - 2 \times \widehat{AMO}$.

• Pour des raisons analogues, on a :

$$\widehat{MOB} = 180 - 2 \times \widehat{OMB}.$$

• En substituant dans la relation (1), il vient :

$$\begin{aligned}\alpha &= (180 - 2 \times \widehat{AMO}) + (180 - 2 \times \widehat{OMB}) \\ &= 360 - 2 \times (\widehat{AMO} + \widehat{OMB}).\end{aligned}$$

Et puisque $\widehat{AMO} + \widehat{OMB} = \widehat{AMB}$, on en déduit que :

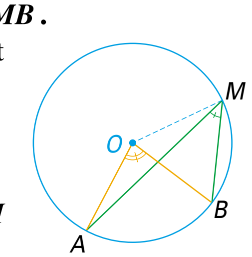
$$\alpha = 360 - 2 \times \widehat{AMB}.$$

D'où $\begin{cases} \alpha = 360 - \widehat{AOB} \\ \alpha = 360 - 2 \times \widehat{AMB} \end{cases}$

Soit $360 - \widehat{AOB} = 360 - 2 \times \widehat{AMB}$

donc : $\boldsymbol{\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}}$.

2) Supposons que le point $O$ soit extérieur au triangle $ABM$.




• On décompose l'angle $\widehat{AOB}$.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOM} - \widehat{BOM}.$$

Or les triangles $AOM$ et $BOM$ sont isocèles en $O$, d'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= (180 - 2 \times \widehat{OMA}) - (180 - 2 \times \widehat{OMB}) \\ &= 2 \times (\widehat{OMB} - \widehat{OMA}).\end{aligned}$$

Et puisque $\widehat{OMB} - \widehat{OMA} = \widehat{AMB}$, on en déduit :

$$\boldsymbol{\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}}.$$

***Conclusion*** : La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



**À vous de jouer**

**1.** On va démontrer la propriété :

« Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre. »

On considère un triangle $A'B'C'$ et $ABC$ le triangle formé par les milieux $A$, $B$ et $C$ des côtés $[A'B']$, $[B'C']$ et $[A'C']$.

1° Que représentent les hauteurs du triangle $ABC$, pour le triangle $A'B'C'$ ?
En déduire qu'elles sont concourantes en un point $H$. On précisera la nature de ce point $H$.

2° Soit $ABC$ un triangle. Construire les droites parallèles aux côtés du triangle et passant par leur sommet opposé. Les intersections de ces trois droites forment un triangle $A'B'C'$.

a) Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont les milieux des côtés du triangle $A'B'C'$.

b) En déduire la démonstration de la propriété.

**2.** On va démontrer la propriété :

« Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité. »

1° On considère un triangle $ABC$, $A'$ et $B'$ les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AC]$. Soit $G$ le point d'intersection des droites $(AA')$ et $(BB')$ et $G'$ le symétrique de $G$ par rapport à $A'$.

Montrer que le quadrilatère $BGCG'$ est un parallélogramme et, en utilisant *le théorème des milieux*, en déduire que le point $G$ est le milieu du segment $[AG']$.

2° Effectuer alors la démonstration du résultat, en montrant que les points $C$, $G$ et $C'$ sont alignés ($C'$ étant le milieu du segment $[AB]$).

**3.** Démontrer les trois propriétés suivantes :

① « L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle. »

1° Soit $A$ et $B$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur. On note $A'$ et $B'$ les images respectives de $A$ et $B$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2° Quelle est la nature du quadrilatère $ABB'A'$ ?

3° En déduire la démonstration de la propriété :

② « L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle. »

1° Soit $A$ et $B$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$ et $O$ un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.

On note $A'$ et $B'$ les images respectives de $A$ et $B$ par la symétrie de centre $O$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABB'A'$ ?

2° En déduire la démonstration de la propriété :

③ « Une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire. »

1° $ABC$ est un triangle. On considère, par exemple, la médiane issue de $A$. Elle coupe le segment $[BC]$ en $I$.

2° Comparer les aires des triangles $ABI$ et $AIC$, puis en déduire la démonstration de la propriété.

**4.** Démontrer les propriétés suivantes.

Soit $I$, $A$ et $B$ trois points non alignés.

Soit $A'$, $B'$ les images respectives de $A$ et $B$ par la symétrie de centre $I$.

1° Démontrer que le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme.

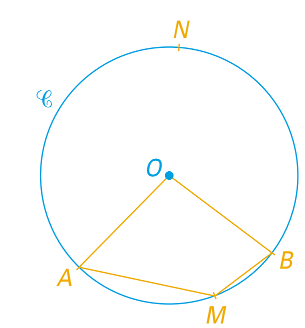
2° Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $I$, $A$ et $B$, afin que le quadrilatère $ABA'B'$ soit :

a) un rectangle ; b) un losange ; c) un carré.

*Pour déterminer une **condition nécessaire et suffisante**, ici, il faut :*
*• trouver une condition sur I, A et B en supposant que le quadrilatère est un rectangle,*
***et***
*• vérifier que cette condition fait de ce quadrilatère un rectangle.*

**5.** Démontrer que lorsque $M$ et $N$ sont deux points du cercle $(\mathcal{C})$ situés de part et d'autre de la corde $[AB]$, on a :

$$\widehat{AMB} = 180° - \widehat{ANB}.$$




1° Quelle est la nature des triangles $AOM$ et $MOB$ ?

2° Montrer que $\widehat{AOB} = 360° - 2\widehat{AMB}$.

(On pourra décomposer $\widehat{AOB}$.)

3° Exprimer $\widehat{ANB}$ en fonction de $\widehat{AOB}$.

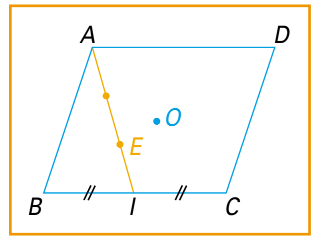
4° En déduire le résultat annoncé.

# 1 Utiliser des médianes pour démontrer

**Dans la figure ci-contre, *ABCD* est un parallélogramme de centre *O*, *I* est le milieu du segment [*BC*] et *E* le point du segment [*IA*] tel que :**

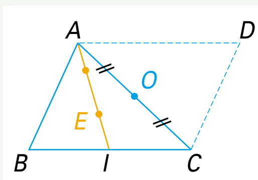
$$IE = \frac{1}{3}IA.$$

**Montrer que *B*, *E*, *O* et *D* sont alignés.**




## SOLUTION

• On commence par construire une figure :




Le fait que le point *E* soit aux deux tiers de la longueur *AI* en partant du point *A*, incite à se demander si le point ***E*** ne serait pas le **centre de gravité** d'un certain triangle.

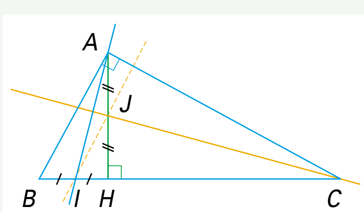
• Il suffit de considérer le triangle *ABC* :
*I* est le milieu du segment [*BC*], donc (*AI*) est la médiane issue du sommet *A*.
Dès lors, *E* est le centre de gravité de ce triangle et (*BE*) est la médiane issue du sommet *B*.
• La droite (*BE*) coupe le segment [*AC*] en son milieu : c'est le point *O*.
Puisque dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, les points *B*, *E* et *O* sont alignés.
***Conclusion*** : Les points *B*, *E* et *O* sont alignés. De plus, *O* étant le milieu du segment [*BD*], les points *B*, *O* et *D* sont alignés. Les points *B*, *E*, *O* le sont aussi. Donc les points *B*, *E*, *O* et *D* sont alignés.

# 2 Utiliser des hauteurs pour démontrer

***ABC* est un triangle rectangle en *A*, *H* est le pied sur [*BC*] de la hauteur issue de *A*. *I* est le milieu du segment [*BH*] et *J* celui du segment [*AH*].**
**Montrer que les droites (*CJ*) et (*AI*) sont perpendiculaires.**

## SOLUTION

• On construit la figure :




On considère le triangle *CIA* :
• (*AH*) est la hauteur issue du sommet *A*.
(Car (*AH*) et (*BC*) sont perpendiculaires.)
• (*IJ*) est la hauteur issue du sommet *I*.
En effet, on se place dans le triangle *ABH*, *J* est le milieu du segment [*AH*] et *I* celui du segment [*BH*].

D'après le théorème des milieux, on en déduit que les droites (*IJ*) et (*AB*) sont parallèles.

Or, les droites (*AB*) et (*AC*) sont perpendiculaires (le triangle *ABC* est rectangle en *A*), donc on a :

$$\begin{cases} (AB) \perp (AC) \\ (AB) \parallel (IJ) \end{cases}, \text{ donc } (IJ) \perp (AC).$$

Les droites (*IJ*) et (*AH*) sont alors deux hauteurs du triangle *AIC*, qui se coupent au point *J*.

Puisque les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, alors le point *J* est l'orthocentre du triangle *AIC* et (*CJ*) est la troisième hauteur de ce triangle. D'où $(CJ) \perp (AI)$.