Configurations et transformations

CHAPITRE 3

1. L'essentiel sur le triangle

1. Le théorème des milieux

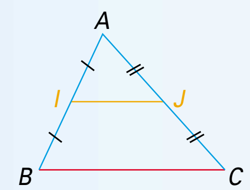
Théorème

Soit un triangle ABC et deux points, I et J, situés respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Si I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, **alors** les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

De plus :

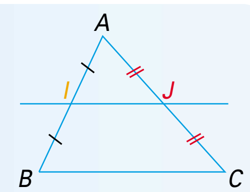
$$IJ = \frac{BC}{2}.$$



Théorème réciproque

Soit un triangle ABC et deux points, I et J, situés respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Si I est le milieu de $[AB]$ et les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, **alors** J est le milieu du segment $[AC]$.



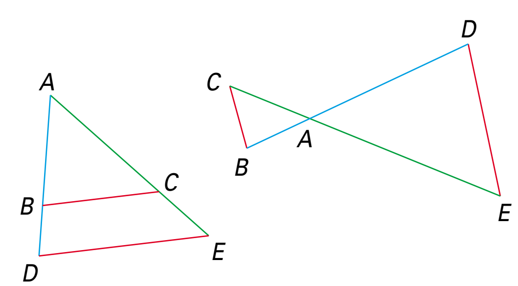
Conséquences :

- Le **Théorème** permet de montrer que **deux droites sont parallèles**.
- Le **Théorème réciproque** permet de montrer qu'un point est le **milieu d'un segment**.

Il est donc important de bien **distinguer les données du résultat** afin d'utiliser le bon théorème :
« milieux des côtés d'un triangle » **ou** « droites parallèles dans un triangle ».

2. Le théorème de Thalès

- **La configuration de Thalès**
Dans chaque cas, les côtés $[BC]$ et $[DE]$ sont parallèles.
$[BC]$ et $[DE]$ sont des **côtés homologues**, comme $[AB]$ et $[AD]$ ou $[AC]$ et $[AE]$.



Théorème

Dans une configuration de Thalès, les **longueurs des côtés homologues** sont proportionnelles.

Théorème réciproque

Soit ABC et ADE deux triangles tels que A, B et D d'une part, et A, C et E d'autre part, sont alignés dans cet ordre.

Si $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$, **alors** les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

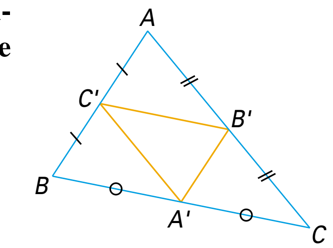
Là encore, il faut bien distinguer les données du résultat afin d'utiliser le bon théorème. Donc il faut toujours se poser la question : « Que doit-on montrer ? »

Voir exercices 1 à 6

Utiliser le théorème des milieux

ABC est un triangle quelconque de périmètre p. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Montrer que le périmètre du triangle $A'B'C'$ est $\frac{1}{2}p$.



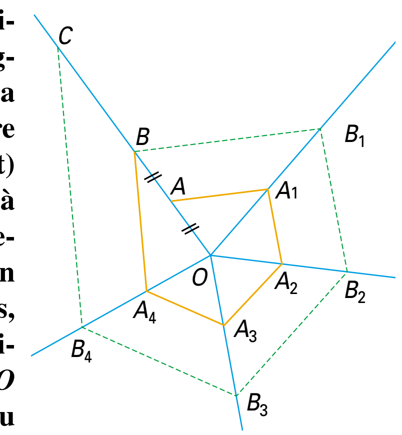
Pour calculer le périmètre d'un triangle, il est nécessaire de déterminer les longueurs de ses côtés.

Solution

- Dans le triangle ABC, C' et B' sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$, donc, d'après le théorème des milieux, on en déduit que :
les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles et surtout
$$B'C' = \frac{BC}{2}.$$
- Par un raisonnement analogue, on montre que :
$$A'C' = \frac{AC}{2} \quad \text{et} \quad A'B' = \frac{AB}{2}.$$
- Finalement, en notant p' le périmètre du triangle $A'B'C'$, on obtient :
$$p' = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{p}{2}.$$

Utiliser le théorème réciproque des milieux

Sur la figure ci-contre, les segments de la seconde spire (pointillé vert) sont parallèles à ceux de la première spire (en orange). De plus, B est le symétrique du point O par rapport au point A.
Montrer que les longueurs BC et BO sont égales.



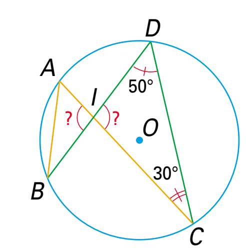
Solution

On considère le triangle OBB_1.

- A est le milieu du segment $[OB]$ et les droites (AA_1) et (BB_1) sont parallèles, donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, on en déduit que A_1 est le milieu du segment $[OB_1]$.
- En réitérant ce raisonnement, on montre que A_2 est le milieu de $[OB_2]$, …, A_4 est le milieu de $[OB_4]$.
- On recommence une dernière fois en montrant que B est le milieu de $[OC]$.
Ainsi, on a :
$$BO = BC.$$

Utiliser le théorème de l'angle inscrit

Dans la figure ci dessous, A, B, C et D sont quatre points sur un même cercle dont on connaît deux angles : $\widehat{IDC} = 50°$ et $\widehat{ICD} = 30°$.
Déterminer les mesures des angles des triangles AIB et CID.



Dès qu'un problème de géométrie fait appel à 4 points cocycliques (situés sur un même cercle), il faut penser au théorème de l'angle inscrit.

Solution

- $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont deux angles qui interceptent le même arc. D'après le théorème de l'angle inscrit, ils ont donc même mesure.
- Il en est de même pour les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$.
- Les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{CID}$, opposés par le sommet, sont donc égaux.

Puisque la somme des angles d'un triangle vaut 180°,
$$\widehat{AIB} = \widehat{CID} = 180° - (50° + 30°) = 100°,$$
puis, $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 50°$ et $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 30°$.