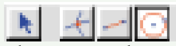
7 Résoudre un problème de géométrie avec le logiciel « CABRI »

1 **On considère deux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$), de centres respectifs O et O', sécants en K et L. On construit les points A et I, respectivement sur les cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) tels que $[KA]$ est un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$) et $[KI]$ un diamètre du cercle ($\mathscr{C}'$).**
Les points A, L et I sont-ils alignés ?

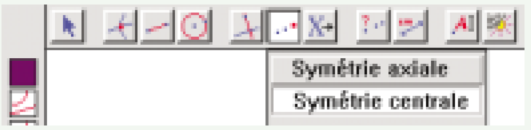
ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION

• Construction de la figure

Sélectionner, dans la barre des tâches, l'icône « cercle » :



Construire alors deux cercles sécants en K et L, puis construire les diamètres $[KA]$ et $[KI]$.
Pour cela, on pourra utiliser une symétrie centrale du point K par rapport aux centres des cercles O et O', à l'aide de la commande Symétrie centrale :



• Visualisation de la propriété

Cliquer sur Aligné ? pour savoir si les points A, L et I sont effectivement alignés.

Il suffit d'interroger le logiciel…

• Le logiciel apporte-t-il la réponse attendue ?

Remarque : À l'aide du « clique-gauche » sur un des cercles, modifier la taille de ceux-ci et vérifier que les points A, L et I restent alignés quelle que soit la taille des cercles.

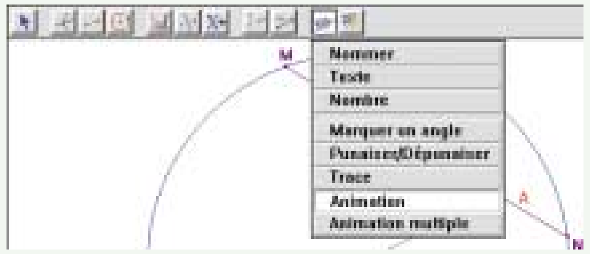
• Résolution mathématique

Après avoir déterminer la nature des triangles KLI et KLA, démontrer le résultat.

2 **On considère un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et A un point intérieur à ce cercle (mais distinct de O).**
Construire, sous CABRI, un cercle ($\mathscr{C}$), un point A qui lui est intérieur, ainsi qu'une corde $[MN]$ (voir l'exercice précédent).
On veut déterminer le lieu des points I, milieux des cordes $[MN]$ de ($\mathscr{C}$) qui passent par A.

ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION

• Visualisation du lieu



• Cliquer sur Animation pour visualiser le mouvement du point I lorsque M (ou N) parcourt le cercle ($\mathscr{C}$).
On sélectionne alors l'objet (ici, le point I) dont on cherche le lieu, puis on lance le point M (ou N) grâce au ressort… La trajectoire du point I est alors donnée.

• Cliquer sur lieu pour visualiser le lieu du point I en fonction de la position des points M et N.

On opère comme précédemment.

Sélectionner le point I, puis le point N, le logiciel dessine alors le lieu.

• Résolution mathématique : voir l'écran.

Démontrer que, lorsqu'il n'est pas aplati, le triangle IAO est rectangle en I.
En déduire que le point I se trouve sur le cercle de diamètre $[OA]$.
Le point I peut-il être en tout point de ce cercle ?
On distinguera les cas :

a) le point I est en O ;

b) I est en A ;

c) I n'est ni en O ni en A.

Conclure.

QCM **Dans les questions suivantes, déterminer la (ou les) bonne(s) réponse(s).**

1. D'après le cours, on sait que :

a Un triangle rectangle peut avoir un angle obtu.

b Un triangle isocèle ne peut pas avoir d'angle obtu.

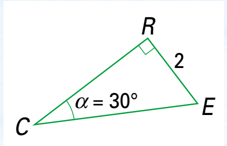
c Un triangle rectangle possédant un angle de 60° est équilatéral.

d Un triangle isocèle possédant un angle de 60° est équilatéral.

2. On peut affirmer, sans se tromper que $\cos 45° + \sin 45°$ est égale à :

a $\frac{2}{\sqrt{2}}$. b $\frac{1}{\sqrt{2}}$. c 0. d 1.

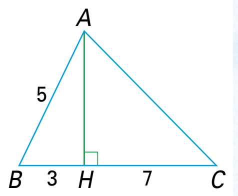
3. Soit REC un triangle rectangle en R et $RE = 2$.
On peut affirmer que :



a $EC = 2{,}31$. b $RC = 2{,}31$.

c $RC = 3{,}46$. d $EC = 4$.

4. Les données de la figure permettent d'affirmer que :



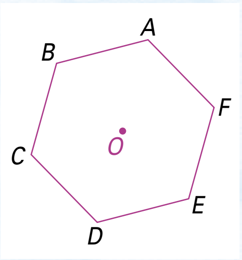
a $AH = 4{,}5$

b $AC = 8$.

c Le triangle ABC est rectangle en A.

d Le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

5. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O.



On peut alors affirmer que :

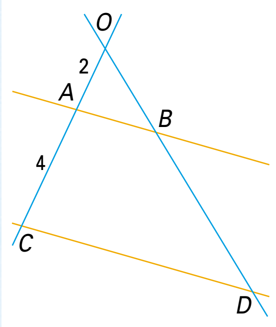
a L'image de B par la rotation de centre O, d'angle 30° et de sens négatif, est A.

b L'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OE}$ est le point O.

c L'image de O par la rotation de centre E, d'angle 60° et de sens positif, est F.

d L'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CO}$ est le point O.

6. Sur la figure, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, $OA = 2$, $AC = 4$.
On peut en déduire que :



a $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$.

b Si $OD = 9$, alors $BD = 4{,}5$.

c Si $BD = 3$, alors $OD = 6$.

d Si $OD = 9$, alors $BD = 6$.

FAUX VRAI

1 Le point de concours des bissectrices est le centre du cercle circonscrit à son triangle.

2 Le centre du cercle circonscrit d'un triangle, son centre de gravité et son orthocentre sont toujours distincts.

3 L'orthocentre d'un triangle se trouve toujours à l'intérieur du triangle.

4 Le point de concours des médiatrices d'un triangle se trouve toujours à l'intérieur du triangle.

5 Le centre de gravité d'un triangle se trouve toujours à l'intérieur du triangle.

6 Le point de concours des bissectrices d'un triangle se trouve toujours à l'intérieur du triangle.

7 Soit α la mesure d'un angle, alors $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

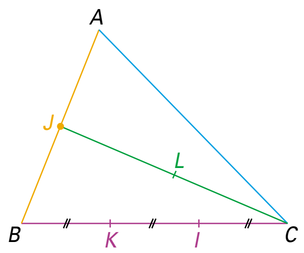
8 Par une symétrie de centre O, une droite ($\mathscr{D}$) contenant O est invariante (son image est elle-même).

9 Une bissectrice partage un angle en deux angles de même mesure, donc elle constitue un axe de réflexion pour un triangle.

1 Prendre un bon départ en géométrie

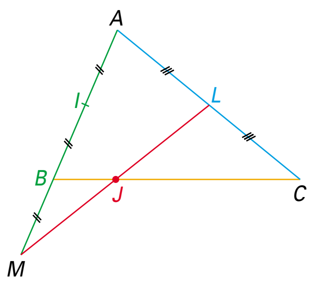
1 Sur la figure ci-dessous, J est le milieu du segment $[AB]$, L est le milieu du segment $[CJ]$ et les points K et I du segment $[BC]$ vérifient :

$$BK = KI = IC.$$



Démontrer que les points A, L et I sont alignés.

2 On considère la figure suivante :



(Les données sont celles de la figure.)

Démontrer que J est le milieu du segment $[ML]$.

Que vaut $\dfrac{BJ}{BC}$?

3 ABC est un triangle quelconque, où I est le milieu de $[BC]$. P et Q sont deux points de $[AC]$ tels que :

$$AP = PQ = QC$$

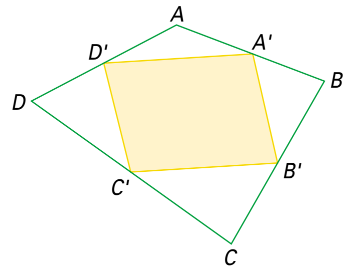
et A, P, Q, C, sont alignés dans cet ordre.

Montrer que la droite (BP) passe par le milieu de $[AI]$.

Le théorème des milieux peut être utile…

4 On considère $ABCD$ un quadrilatère quelconque et A', B', C' et D', les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[CA]$. (Voir la figure ci-après.)

Démontrer que le « quadrilatère des milieux » $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

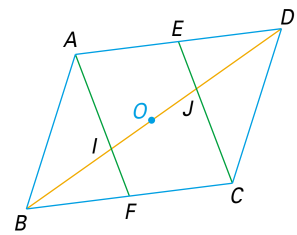


5 Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

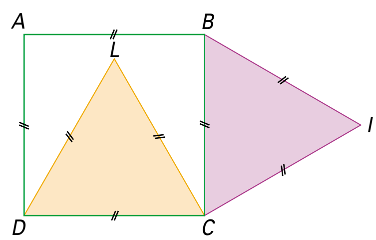
Les points E et F sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[BC]$.

Montrer que l'on a :

$$BI = IJ = JD.$$



6 On reprend l'exercice résolu 6, dont voici la figure :



En calculant la mesure de l'angle $\widehat{ALI}$, montrer que les points A, L et I sont alignés.

2 Utiliser des droites remarquables du triangle

7 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Les hauteurs des triangles ADO et BOC issues respectivement des sommets A et B se coupent en I.

Démontrer que les droites (OI) et (DC) sont perpendiculaires.

8 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

O' est le symétrique de O par rapport à B et C' le symétrique de C par rapport à D.

Montrer que le milieu du segment $[O'C']$ est aligné avec les points A et C.

Ici, on s'intéressera au point O, dans le triangle O'CC'.